• جلسه اول - ۸ مهر

• فصل اول

اعداد مختلط: $Z = a + ib$ $\quad (i^2 = -1) \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

قسمت حقیقی (a) — قسمت موهومی (ib)

• $Z_1 + Z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

• $-Z_1 = -(a_1 + ib_1) = -a_1 - ib_1$

• $Z_1 - Z_2 = Z_1 + (-Z_2) = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)$

$= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

• $Z_1 . Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + \underbrace{i^2}_{-1} b_1b_2$

$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

• Ex

$Z_1 + Z_2 = ?$

$Z_1 - Z_2 = ?$

$Z_1 . Z_2 = ?$

$Z_1 = 2 - \frac{1}{2}i \quad , Z_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}i$

$Z_1 + Z_2 = (2 + \frac{3}{2}) + i(-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}) = \frac{7}{2} + i\frac{3}{4}$

$Z_1 - Z_2 = (2 - \frac{1}{2}i) - (\frac{3}{2} + \frac{5}{4}i) = (2 - \frac{3}{2}) + i(-\frac{1}{2} - \frac{5}{4}) = \frac{1}{2} + i(\frac{-7}{4})$

$Z_1 . Z_2 = (2 - \frac{1}{2}i) . (\frac{3}{2} + \frac{5}{4}i) = 3 + \frac{5}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\underbrace{i^2}_{-1}$

Day.... Month.... Year.......... Subject..........

$= (۲+\frac{۵}{۸}) + i(\frac{۵}{۲} - \frac{۳}{۴}) = \frac{۲۹}{۸} + i(\frac{۷}{۴})$ $\square$

• مزدوج: $\bar{z}$

$\overline{(a+ib)} = a - ib$

$\overline{۳ - \frac{۱}{۲}i} = ۳ + \frac{۱}{۲}i$ ، $\overline{۳ + \frac{۱}{۲}i} = ۳ - \frac{۱}{۲}i$

• معکوس یک عدد مختلط: $۳ \to \frac{۱}{۳}$

$(a+ib) \to \frac{۱}{a+ib} = ?$

$$\frac{۱}{z} = \frac{۱}{(a+ib)} = \frac{۱}{(a+ib)} \cdot \frac{(a-ib)}{(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^۲ - i^۲ b^۲} = \frac{a-ib}{a^۲+b^۲} = \frac{a}{a^۲+b^۲} - i\frac{b}{a^۲+b^۲}$$

در مزدوج ضرب و تقسیم کرده.

. Ex

$$\frac{۱}{z} = \frac{۱}{۵-۳i} \Rightarrow \begin{cases} a = ۵ \\ b = -۳ \end{cases} \to \frac{۱}{z} = \frac{۵}{۲۵+۹} - i\frac{(-۳)}{۲۵+۹}$$

$$\frac{۱}{z} = \frac{۵}{۳۴} + \frac{۳i}{۳۴} \quad \square$$

• تقسیم دو عدد مختلط: $\frac{z_۱}{z_۲}$

$$\frac{z_۱}{z_۲} = z_۱ \times (\frac{۱}{z_۲})$$

. Ex

$$z_۱ = ۲ - ۳i \ , \ z_۲ = ۱ + i \to \frac{z_۱}{z_۲} = ?$$

$$\frac{۱}{z_۲} = \frac{۱}{۱+i} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases} \to \frac{۱}{z_۲} = \frac{۱}{\underbrace{۲}_{۱^۲+۱^۲}} - i\frac{۱}{\underbrace{۲}_{۱^۲+۱^۲}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \left(\frac{1}{z_2}\right) = (2-3i) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = 1 - i - \frac{3}{2}i + \frac{3}{2}\underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= \left(1-\frac{3}{2}\right) + i\left(-1-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

Note: z^m

$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

که $r = \sqrt{a^2+b^2}$ و $\text{Arg}\, z = \theta = \overbrace{\text{arctg}}^{\tan\ \text{آرک}}\left(\frac{b}{a}\right)$ (آرگومان)

Note: if $z = re^{i\theta} \xrightarrow{\text{توان}} z^m = r^m e^{im\theta}$

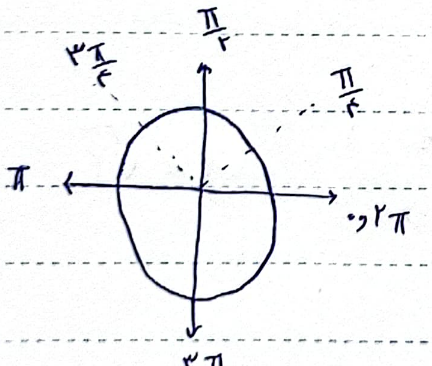
Ex: $z = 1+i \to z^3 = ?$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \to r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^3 = (\sqrt{2})^3 e^{i3\frac{\pi}{4}}$$



تمرین: $z^{14} = (1-z)^{14} = ? \to \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \to r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \to z^{14} = (\sqrt{2})^{14} e^{-i14\frac{\pi}{4}}$$

نکته: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Note: if $z = re^{i\theta}$

z ریشه n ام $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right]$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

Ex. ریشه دوم -1 را محاسبه کن.

$z = \sqrt{-1} \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

$r = \sqrt{(-1)^2} = +1$, $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$

$\underbrace{1^{\frac{1}{2}}}_{1}\left[\cos\frac{2k\pi+\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi+\pi}{2}\right]$

Ex. ریشه‌های معادله $z^4 - 1 = i$ را به دست آورید.

$z^4 = 1 + i \rightarrow z = (1+i)^{\frac{1}{4}} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow r = \sqrt{2}$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$z_k = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4}\right)\right]$

$k = 0, 1, 2, 3$ یعنی $4-1$

Day. Month. Year. Subject.

if $k=0 \rightarrow Z_0 = ۲^{\frac{1}{۸}}\left[\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right]$

if $k=1 \rightarrow Z_1 = ۲^{\frac{1}{۸}}\left[\cos\frac{9\pi}{14} + i\sin\frac{9\pi}{14}\right]$

if $k=۲ \rightarrow Z_۲ = ۲^{\frac{1}{۸}}\left[\cos\frac{۱۷\pi}{14} + i\sin\frac{۱۷\pi}{14}\right]$

if $k=۳ \rightarrow Z_۳ = ۲^{\frac{1}{۸}}\left[\cos\frac{۲۵\pi}{14} + i\sin\frac{۲۵\pi}{14}\right]$ $\square$

تمرین: ریشه معادله $(z+1)^۴ + (z-1)^۴ = 0$ را بدست آورید؟

hint: $\frac{(z+1)^۴}{(z-1)^۴} = -1$ $\quad \frac{z+1}{z-1} = T \rightarrow T = \sqrt[۴]{-1}$

ریشه ۴ ام

جلسه دوم _ ۱۰ مهر

Ex. اگر $|z| = 1$ آنگاه $\left|\dfrac{az+b}{b\bar{z}+a}\right| = 1$ ؟

همان

$z = x + iy \quad , \quad \bar{z} = x - iy$

$\underbrace{|z|}_{\text{همان } \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow |z|^2 = (x^2+y^2)$ if $|z| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$\rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\left|\dfrac{a(x+iy)+b}{b(x-iy)+a}\right| = 1 \rightarrow \left|\dfrac{ax+iay+b}{bx+iby+a}\right|^2 = 1 \rightarrow \left|\dfrac{(ax+b)+iay}{(bx+a)+iby}\right|^2 = 1$

$|(ax+b)+iay|^2 = |(bx+a)+iby|^2 \rightarrow (ax+b)^2 + (ay)^2 = (bx+a)^2$

$+(-by)^2 \rightarrow a^2x^2 + \cancel{2axb} + b^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + \cancel{2bxa} + a^2 + b^2y^2$

$\rightarrow a^2x^2 + b^2 + a^2y^2 = b^2x^2 + a^2 + b^2y^2 \rightarrow (a^2-b^2)x^2 + (a^2-b^2)y^2 = a^2 - b^2$

$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } a^2-b^2} x^2 + y^2 = 1$

Ex. مزدوج عدد $\dfrac{2}{1-i}$ ؟

$\dfrac{2}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{2+2i}{1^2 - i^2}$

$\rightarrow \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$

حالا مزدوج عدد $1+i$ ؟ $\boxed{1-i}$

جواب نهایی

• فصل دوم

حد و پیوستگی: برای این که بگوییم تابع $f(z)$ در نقطهٔ z_0 دارای حد

اپسیلون دلتا

$f(z_0)$ می‌باشد کافی است $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ی

موجود باشد که اگر $|z - z_0| < \delta$ آنگاه: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

$\lim_{x \to 1} x^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow \lim (\overbrace{x + iy}^{f(z)})$

$f(z) = \bar{z} = \overline{(x+iy)} = x + iy$

$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$f(z) = \frac{1}{z}$

Ex. نشان دهید $\lim_{z \to 2i} (z + 3i) = 5i$

حل: فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، در این صورت $\delta > 0$ ($\delta = \varepsilon$) موجود

است که اگر $|z - 2i| < \delta$ آنگاه $|f(z) - 5i| < \varepsilon$?

$\to |f(z) - 5i| = |z + 3i - 5i| = |z - 2i| < \delta = \varepsilon$

$\to |f(z) - 5i| < \varepsilon$ ∎

Ex. تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ برای $D=\{x\in S \mid 0<|z|<1\}$ پیوسته است؟

آیا برای $|z|>1$ پیوسته است؟

حل: (اگر $|z|>1$ باشد). فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده باشد. $(\delta=\varepsilon)$ $\delta>0$ ی

موجود باشد که اگر $|z-z_0|<\delta$ باشد آنگاه $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right|=\left|\frac{z_0-z}{zz_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{|zz_0|}<|z-z_0|<\delta=\varepsilon$$

(2)

به شرط این که $|z|>1$ پس پیوسته خواهد بود.

پس اگر $|z|<1$ باشد پیوسته نیست. (چون نامساوی (2) برقرار نیست.) $\blacksquare$

مشتق $f(x)=x^2-\sin x \to f'(x)=2x-\cos x$

$f(z)=z^2 \to f'(z)=2z$ $\{$ $f(z)=\bar{z} \to$ مشتق ندارد.

طبق تعریف مشتق می‌توان نشان داد که مشتق ندارد.

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\to\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}-0}{z-0}=$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{x-iy}{x+iy}$$

if $\begin{cases} x\neq 0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$

if $\begin{cases} x=0 \\ y\neq 0 \end{cases} \rightarrow \lim_{y\to 0}\frac{-iy}{iy}=-1$

چون در دو جهت متفاوت (که هر دو به سمت صفر میل می‌کنند)، دو جواب متفاوت به دست می‌آید پس مشتق ندارد.

شرایط کشی ریمان: اگر تابع $f(z) = u + iv$، در این صورت گوییم

تابع f در شرایط کشی ریمان (شرایط زیر) صدق می‌کند اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Note. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد آنگاه در شرایط کشی ریمان صدق می‌کند.

اما عکس مسئله برقرار نیست یعنی تابعی وجود دارد که در شرایط کشی ریمان صدق می‌کند

اما مشتق‌پذیر نیست.

Note. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد $f = u + iv$ ثابت می‌شود

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ex. اگر $f = z^2$ در این صورت u؟ v؟ $\quad f = u + iv$

$$f = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + \underbrace{2ixy}_{v = 2xy}$$

تمرین. نشان دهید تابع

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(1+i)\,xy}{x^2+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

در $z = 0$ مشتق‌پذیر نیست. اما در معادلات کشی‌ریمان صدق می‌کند. (در نقطه $z = 0$؟)

Day. 11 Month. 10 Year. 2024 Subject.

• جلسه سوم - ۱۵ مهر

Ex1. ثابت کنید.

الف) $i^{۱۳۹۲} = ۱$

حل الف)

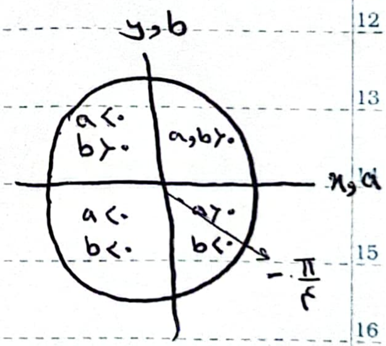
$i^{۲} = -۱ \;,\; i^{۴} = (i^{۲})(i^{۲}) = (-۱)(-۱) = +۱$

$i^{۸} = i^{۴} \cdot i^{۴} = (۱)(۱) = ۱ \;,\; i^{۱۶} = i^{۸} \cdot i^{۸} = (۱)(۱) = ۱ \;,$

چون ۱۳۹۲ بر ۴ بخش پذیر است، پس $i^{۱۳۹۲}$ برابر یک می باشد. $\rightarrow i^{۱۳۹۲} = ۱$ پس

Ex2.

الف) $\sqrt[۳]{1-i} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \end{cases} \longrightarrow r = \sqrt{۱^{۲} + (-۱)^{۲}} = \sqrt{۲}$



$\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{-۱}{۱}\right) = -\frac{\pi}{۴}$

$Z_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{۲k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{۲k\pi+\theta}{n}\right]$

$k = ۰, ۱, \ldots, \underset{۳}{n-۱} \rightarrow ۰, ۱, ۲$

$Z_۰ = \sqrt[۶]{۲}\left[\cos\frac{-\frac{\pi}{۴}}{۳} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{۴}}{۳}\right]$

$Z_۱ = \sqrt[۶]{۲}\left[\cos\frac{۲\pi-\frac{\pi}{۴}}{۳} + i\sin\frac{۲\pi-\frac{\pi}{۴}}{۳}\right]$

$Z_۲ = \sqrt[۶]{۲}\left[\cos\frac{۴\pi-\frac{\pi}{۴}}{۳} + i\sin\frac{۴\pi-\frac{\pi}{۴}}{۳}\right]$

Ex 3 . حل کن تا به یه چیزی برسی!

حقیقی با هم، موهومی با هم

$$\left|\frac{z+2}{z-1}\right| < 2 \rightarrow \left|\frac{(x+iy)+2}{(x+iy)-1}\right|^2 < 2^2 \rightarrow \frac{(x+2)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2} < 4$$

$$\rightarrow \frac{x^2+4x+4+y^2}{x^2-2x+1+y^2} < 4 \rightarrow x^2+4x+\cancel{4}+y^2 < 4x^2-8x+\cancel{4}+4y^2 \rightarrow$$

$$0 < \underset{(x^2-4x+y^2)}{3x^2-12x+3y^2} \xrightarrow{\div 3} 0 < (x^2-4x)+y^2$$

نکته: $x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightsquigarrow x^2-4x=(x-2)^2-(2)^2$

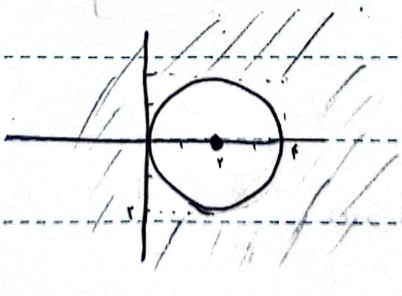
$$\rightarrow 0 < (\underbrace{x^2-4x+4}-\underbrace{4})+y^2 \rightarrow 0 < \left[(x-2)^2-4\right]+y^2 \rightarrow$$

$$0 < (x-2)^2-4+y^2 \rightarrow 4 < (x-2)^2+y^2$$

نقاط بیرون دایره به مرکز (۲, ۰)

و به شعاع ۲

قسمت هاشور خورده.



Day. 18 Month. Oct Year. 2024 Subject.

• جلسه چهارم - ۲۲ مهر

فصل ۳ - توابع جبری مقدماتی: مانند e^{z} , $\sin z$, $\cos z$, $tg z$ و ...

Note. $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$

$$= \underbrace{e^{x}\cos y}_{u} + i\underbrace{e^{x}\sin y}_{v} = u + iv$$

Note. $(e^{z})' = e^{z}$ $\Big\{$ $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ $\Big\{$ $e^{z_1} \div e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$

$e^{z+2\pi i} = e^{z}$ $\Big\{$ $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \Big\{ \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

مشتق

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z \quad \Big\{ \quad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \sin z_2 \cdot \cos z_1$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Day. Month. Year. Subject.

سکانت $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ $\Big\{$ کُسکانت $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$

Ex. $|e^z|$ را حساب کنید.

$$e^z = \overbrace{e^x \cos y}^{u} + i\,\overbrace{e^x \sin y}^{v} \rightarrow |e^z| = \sqrt{\left(\text{قسمت حقیقی}\right)^2 + \left(\text{قسمت موهومی}\right)^2} = \sqrt{u^2+v^2}$$

$$= \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y}$$

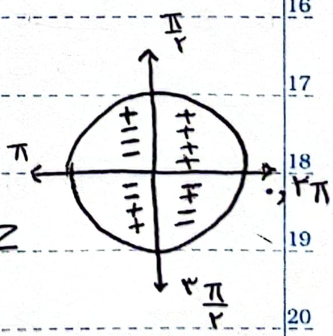
$$= \sqrt{e^{2x}(\underbrace{\cos^2 y + \sin^2 y}_{\text{یک}})} = \sqrt{e^{2x}} = e^x$$

Note. $\dfrac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$ $\Big\{$ $\dfrac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$

$\dfrac{d}{dz}\sec z = \sec z \cdot \tan z$ $\Big\{$ $\dfrac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cdot \cot z$

$\sin(z+\pi) = -\sin z$ $\Big\{$ $\sin(z+2\pi) = \sin z$

$\cos(z+\pi) = -\cos z$ $\Big\{$ $\cos(z+2\pi) = \cos z$



$\tan(z+\pi) = \tan z$ $\Big\{$ $\tan(z+2\pi) = \tan z$

$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\Big\{$ $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\dfrac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$ سینوس هیپربولیک (هایپربولیک)

$$\frac{d}{dz}\cosh z = -\sinh z$$

$$\sin^{۲} hz + \cos^{۲} hz = 1$$

$$\cos(iz) = \cosh z \qquad \{\; i\sin(iz) = \sinh z$$

Ex1. معادله $\sin Z = 14$ را حل کنید.

Ex2. مقدار $Ln(-1)$ ؟

Note. $Ln\, z = Ln|z| + ۲k\pi i$

Ex3. بزرگترین دامنه تحلیلی ازتابع $f(z) = Ln\left[z-(۳+۴i)\right]$ را بیابید؟ $f(0)$ ؟ $Re\, w \leq 0$, $Im\, w = 0$

حل 1: $\sin z = \sin(x+iy) \Rightarrow \overbrace{\sin x . \cosh y}^{\text{حقیقی} = 14} + i\, \overbrace{\cos x . \sinh y}^{\text{موهومی} = \text{صفر}} = 14$

if $\sin x . \cosh y = 14$ — if $x = \frac{\pi}{۲} \to \sin\frac{\pi}{۲} = 1$ (1) ; if $x = \frac{۳\pi}{۲} \to \sin\frac{۳\pi}{۲} = -1$ (۲)

(1): $\to \cosh y = 14 \to y = \operatorname{arccosh}(14)$

(۲): $\to \cosh y = -14 \to y = \operatorname{arccosh}(-14)$

if $\cos x . \underbrace{\sinh y}_{\text{مخالف صفر}} = 0 \to \cos x = 0 \to x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$

$\left(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \ldots\right)$

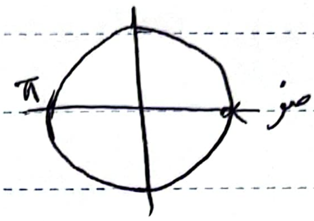
حل ۲:

$\ln(-1)$

$\hookrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \rightarrow z=a+ib \rightarrow |z| = \sqrt{1+0} = 1$

$\ln(-1) = \underbrace{\ln(1)}_{\text{صفر}} + i2k\arg(-1) = 0 + i2k\pi = i\pi 2k$

$\theta = \arctan\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right) = \arctan\left|\frac{0}{-1}\right| = \pi$



حل ۳: $\begin{cases} Z = x+iy \\ \;\; = a+ib \end{cases}$ اختیار شود

$\ln(z-(3+4i)) = \ln(x+iy-3-4i)$

$= \ln((x-3)+i(y-4))$

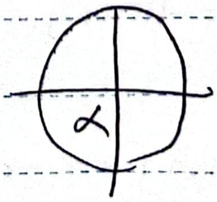
$\operatorname{Re} w \leq 0 \rightarrow x-3 \leq 0 \rightarrow x \leq 3$

$\operatorname{Im} w = 0 \rightarrow y-4 = 0 \rightarrow y = 4$

$f(0) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ گذاشته شود $\Rightarrow \ln(-3-4i)$

جنس دلقل برابر است: $\sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\theta = \arctan\left(\left|\frac{-4}{-3}\right|\right) = -2{,}214$



$\rightarrow \ln(-3-4i) = \ln(5) + i2k(-2{,}214)$

$\cos^{-1} w = -i \operatorname{Ln}\left(z + i\sqrt{1+z^2}\right)$ .Note

$\sin^{-1} w = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1+z^2}\right)$

$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln}\left[\frac{1-iz}{1+iz}\right]$

$\sec^{-1} z = i \operatorname{Ln}\left[\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}\right]$

$\cosh^{-1} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$ معکوس مثلثاتی

$\sinh^{-1} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$

$\tanh z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$

$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$ } $\frac{d}{dz} \sinh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

$\frac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$ } $\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$ } $\frac{d}{dz} \cosh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$

Ex. تصویر ناحیه مستطیلی محدود به خطوط $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$ تحت نگاشت

$w = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} z + 1 + 2i$ ؟

Day...... Month...... Year...... Subject......

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$w = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]\left[x+iy\right] + 1 + 2i$$

$$= (1+i)(x+iy) + 1 + 2i = x + iy + ix + \underbrace{i^2}_{-1}y + 1 + 2i$$

$$= (\overbrace{x-y+1}^{u}) + i(\overbrace{x+y+2}^{v}) \rightarrow \begin{cases} x-y+1 = u & ① \\ x+y+2 = v \end{cases}$$

$$2x + 3 = u+v$$

$$x = \frac{u+v-3}{2}$$

$$① \rightarrow y = x+1-u = \frac{u+v-3}{2} + 1 - u$$

$$y = \frac{u+v-3+2-2u}{2} = \frac{v-u-1}{2}$$

if $x = 0 \rightarrow \frac{u+v-3}{2} = 0 \rightarrow u+v = 3$

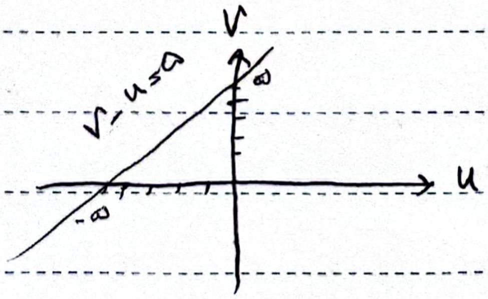
if $y = 0 \rightarrow \frac{v-u-1}{2} = 0 \rightarrow v-u = 1$

if $x = 1 \rightarrow \frac{u+v-3}{2} = 1 \rightarrow u+v = 5$

if $y = 2 \rightarrow \frac{v-u-1}{2} = 2 \rightarrow v-u = 5$

u	0	-5
v	5	0

نقطه گذاری کن



حالا هر چهارتا رو نقطه میدی و رسم می‌کنی !!!

• جلسه پنجم - ۲۴ مهر

Ex. $w = Ln|3i| = ?$ $\begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$ $\sqrt{0+3^2} = 3$

$\theta = \arctan\left(\frac{3}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$ بین تانژانت چه زاویه‌ای میشه ∞؟

$Ln\,3 + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

Ex. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sinh z = i\sqrt{2}$ ب) $\cos z = -3$

ج) $\cosh z = i \xrightarrow{\text{حل ج}} z = \cosh^{-1}(i) = Ln\left(i + \sqrt{i^2 - 1}\right)$ ②

حل الف:
$z = \operatorname{arcsinh}(i\sqrt{2}) = \sinh^{-1}(i\sqrt{2})$

① $= Ln\left(i\sqrt{2} + \sqrt{(i\sqrt{2})^2 + 1}\right) = Ln\left(i\sqrt{2} + i\right) = Ln\left(i(1+\sqrt{2})\right)$

$= Ln(i\,2{,}4)$ ∴

Note.
$$\begin{cases} \sinh^{-1} z = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) & ① \\ \cosh^{-1} z = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) & ② \\ \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \end{cases}$$

حل ب:

$$\cos z = -3 \rightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = -3$$

$$e^{iz}+e^{-iz} = -6 \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در } e^{iz} \text{ ضرب}} e^{2iz}+1 = -6e^{iz}$$

$$\rightarrow e^{2iz}-6e^{iz}+1=0 \xrightarrow[\text{متغیر}]{\text{تغییر}} T=e^{iz} \rightarrow T^2+6T+1=0 \begin{cases} a=1 \\ b=6 \\ c=1 \end{cases}$$

$$T = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2} = \frac{-6\pm\sqrt{32}}{2}$$

$$e^{iz} = T = -3\pm\sqrt{8} \rightarrow z = \frac{1}{i}\ln(-3\pm\sqrt{8})$$

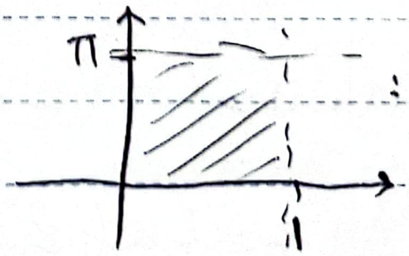
Ex1. تصویر مستطیل $0 < x < 1$ و $0 < y < \pi$ را تحت نگاشت $w=e^z$ بدست آورید؟

Ex2. اگر $w=z^n$، مقادیر u و v؟

Ex3. اگر $w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$، مقادیر u و v؟

Ex4. تابع $w=\frac{1}{z}$ برحسب قطبی (مقادیر u و v)؟ برحسب x و y مقادیر u و v (دکارتی) را محاسبه کنید.

حل ۱:



$$w=e^z=e^{x+iy}=\underbrace{e^x}_{r}e^{iy} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} r=e^x \\ \theta=y \end{matrix}$$

$$w=e^z=re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} \text{if } x=0 \to r=e^{0}=1 \\ \text{if } x=1 \to r=e^{1}=e \end{cases} \longrightarrow 1 \leq r \leq e$$

$$\begin{cases} \text{if } y=0 \to \theta=0 \\ \text{if } y=\pi \to \theta=\pi \end{cases} \longrightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$. Note : حل ۲

$$w=z^{n}=(re^{i\theta})^{n}=\underbrace{r^{n}}_{\text{اسکالر (عدد)}}e^{in\theta}$$

$$=r^{n}[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]$$

$$=\underbrace{r^{n}\cos(n\theta)}_{u}+i\underbrace{r^{n}\sin(n\theta)}_{v}=u+iv$$

: حل ۳

$$w=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]$$

$$=\underbrace{\sqrt[n]{r}\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)}_{u}+i\underbrace{\sqrt[n]{r}\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)}_{v}$$

: حل ۴

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$=\frac{1}{r}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]=\frac{1}{r}[\cos\theta-i\sin\theta]$$

کوسینوس در ربع چهارم مثبت و سینوس در ربع چهارم منفی است.

$= \underbrace{\frac{1}{r}\cos\theta}_{u} + i\underbrace{\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)}_{v}$

$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \longrightarrow$ در مزدوج مخرج ضرب وتقسیم کرده $\longrightarrow \frac{1(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}$

$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u} + i\underbrace{\frac{(-y)}{x^2+y^2}}_{v}$

$\longrightarrow u^2+v^2 = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)} = \frac{1}{r^2}$

یعنی: دایره به مرکز (۰و۰) و به شعاع $\frac{1}{r}$

Ex1: تابع $w=\sin z$ ؟ (برحسب u و v)

Ex2: تصویر خط $z=ix$ را که در آن $0<x<\frac{\pi}{2}$ است تحت نگاشت $w=\cosh z$ ؟

حل: $w=\sin z = \sin(x+iy) = \sin x\cdot\cos(iy) + \cos x\cdot\sin(iy)$

ازطرفی Note. $\cos(iy)=\cosh y$ ، $\sin(iy)=i\sinh y$

$w = \sin z = \overbrace{\sin x\cosh y}^{u} + i\,\overbrace{\cos x\sinh y}^{v}$

$\begin{cases} u = \sin x\cdot\cosh y \longrightarrow \sin x = \dfrac{u}{\cosh y} \\ v = \cos x\sinh y \longrightarrow \cos x = \dfrac{v}{\sinh y} \end{cases}$

Day. 1 Month Nov Year. 2024 Subject.

از طرفی: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\left(\frac{u}{\cosh y}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh y}\right)^2 = 1 \longrightarrow \frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$$

در ربع چهارم کسینوس مثبت است.

حل ۲: $w = \cosh z \overset{\text{نکته}}{=} \cos(iz) = \cos(i(ix)) = \cos(-x) = \cos x$

$$\left[\begin{array}{l} \text{if } x = 0 \rightarrow \cos 0 = 1 \\ \text{if } x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right. \longrightarrow 0 \leq \cos x \leq 1$$