(۱) معادلات دیفرانسیل - دکتر عرفانیان

استاد هومن مهتابی

معادلات خطی: توان های از y نداشته باشند

$$\begin{cases} y' - 3y = 0 \\ y'' + y' = x \\ (y')^2 - y^3 = x^3 \end{cases}$$

معادلات غیرخطی: شامل y^2 ، y'' ، $y^{(4)}$ و ....

مرتبه یک معادله: بالاترین مشتق y را در آن پیدا کرده، سپس به آن یک مرتبه معادله گویند.

$y'' + y' = x \Leftarrow$ مرتبه ۲

$y'' - y^{(4)} = x^3 \Leftarrow$ مرتبه ۴ $\Leftarrow$ چون مشتق سوم y را دارد

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

$$\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y - \sin x \, y = x \end{cases}$$

از روش های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول، ۲ روش جدای پذیر (تفکیک پذیر) است

[یعنی بتوان x را در یک سمت با dx و طرف دیگر y با dy]

$$Ex \to y' - 2y = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 2y \qquad \frac{dy}{2y} = dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال از همه}} \int \frac{dy}{2y} = \int dx \to \frac{1}{2} \ln y = x + C$$

$$EX \Rightarrow y' - 2xy = 0 \qquad y' = 2xy \qquad \frac{dy}{dx} = 2xy \to \frac{dy}{2y} = x\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \frac{dy}{2y} = \int x\,dx \to \frac{1}{2} \ln y = \frac{x^2}{2} + C \quad \square$$

Subject:
Year: Month: Date:
Sa Su Mo Tu We Th Fr

EX معادلات زیر را حل کنید.

1) $y' = \frac{x+y}{1-x-y}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{1-(x+y)}$ (1) $\quad x+y = T \xrightarrow{\text{دیفرانسیل}}$

$1+y' = \frac{dT}{dx} \to y' = \frac{dT}{dx} - 1$ $\quad$ (1) $\to \frac{dT}{dx} - 1 = \frac{T}{1-T}$

$\frac{dT}{dx} = \frac{T}{1-T} + 1 = \frac{T+1-T}{1-T} = \frac{1}{1-T}$ $\quad \frac{dT}{dx} = \frac{1}{1-T} \to (1-T)dT = dx$

انتگرال $\Rightarrow T - \frac{T^2}{2} = x + C \to (x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} = x + C$ □

2) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ $\quad \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \xrightarrow{\text{انتگرال}}$

$\arctan y = \arctan x + C$ □

3) $y' - (x+y)^2 = 4x + 4y + 3$ $\quad y' - (x+y)^2 = 4(x+y) + 3$

$x+y = T$ $\quad 1+y' = T'$ $\quad y' = T' - 1$

$\Rightarrow (T'-1) - T^2 = 4T + 3 \Rightarrow T' = 4T + 4 + T^2$

$\frac{dT}{dx} = 4T + 4 + T^2 = (T+2)^2$ $\quad \frac{dT}{(T+2)^2} = dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{(T+2)^{-2+1}}{-2+1} = x + C$ □

4) $\cos y \ln(\sin y + 5)\, dy - dx = 0$ $\quad \sin y = T$ $\quad \cos y\, y' = T'$

$y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad$ صورت سوال را بر dx تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow \cos y \ln(\underbrace{\sin y}_{T} + 5)\frac{dy}{dx} = 1$

$\to \ln(T+5)\, T' = 1$ $\quad \ln(T+5)\frac{dT}{dx} = 1$ $\quad \xrightarrow{\text{جداسازی}} \ln(T+5)\, dT = dx$

$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \ln(T+5)\, dT = \int dx = x + C$

DAYAN

$I = \int Ln(T+5)\, dT \Rightarrow$ روش جزء به جزء

$$\begin{cases} Ln(T+5) = u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{T+5}\, dT = du \\ dT = dV \xrightarrow{\text{انتگرال}} T = V \end{cases}$$

$I = T\, Ln(T+5) - \int \frac{T}{T+5}\, dt$ $\qquad \int \frac{T+5-5}{T+5}\, dT = \int dT - \int dT - \int \frac{5}{T+5}\, dT$

$= T - 5\, Ln(T+5)$

$I = T\, Ln(T+5) - [T - 5\, Ln(T+5)]$ $\square$

۵) $\frac{Ln\, x}{x}\, dx = e^y \sin y\, dy$ $\qquad \int \frac{Ln\, x}{x}\, dx = \int e^y \sin y\, dy$

$\frac{(Ln\, x)^2}{2} = \int e^y \sin y\, dy + C \longrightarrow$ انتگرال جزء به جزء $\square$

تابع همگن: (با مرتبه n)

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ $\qquad f(x,y) = x^3 y^2$ EX

$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 (\lambda y)^2 = \lambda^5 x^3 y^2 \longrightarrow \lambda^5 f$

این تابع همگن با مرتبه ۵

EX $f = x + y^2$ همگن نیست زیرا

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \lambda^2 y^2 = \lambda(x + \lambda y^2) \neq \lambda f$

Not (معادله دیفرانسیل همگن) در صورتی که معادله مرتبه ۱ داشته باشیم که به صورت $M\, dx + N\, dy = 0$ باشد که M و N توابعی برحسب x و y باشند و M و N توابعی همگن و از یک مرتبه n باشند، در اینصورت معادله دیفرانسیل همگن است.

روش حل)

$y = xu \longleftarrow \frac{y}{x} = u$

$\hookrightarrow y' = u + x\frac{du}{dx}$

سپس در معادله گذاشته و معادله قابل تبدیل به جدا شدنی می شود.

$\boxed{\text{نکته } (fg)' = f'g + fg'}$

نکته $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$ $\qquad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

نکته $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{u}{a} + c$

تمرین : $(\overbrace{y^2 - 2xy}^{M})dx + (\overbrace{2xy - x^2}^{N})dy = 0$

hint M و N هر ۲ تابع همگن از مرتبه ۲ هستند.

$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - 2xy}{2xy - x^2} = -\frac{x^2(y^2/x^2 - 2\,y/x)}{x^2(2\,y/x - 1)}$ $\qquad y/x = u \quad y = xu$

$y' = x\frac{du}{dx} + u \qquad x\frac{du}{dx} + u = -\frac{(u^2 - 2u)}{(2u-1)} \rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{-u^2 + 2u}{2u-1} - u =$

$\Rightarrow \frac{-u^2 + 2u - 2u^2 + u}{2u-1} \rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{-3u^2 + 3u}{2u-1}$

$\Rightarrow \frac{(2u-1)}{-3(u^2 - u)} du = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{-1}{3}\int \frac{2u-1}{u(u-1)} du = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

$\frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} = \frac{2u-1}{u(u-1)}$ (1) $\qquad A(u-1) + Bu = 2u - 1 \begin{cases} \text{if } u = 0 & -A = -1 \quad A = 1 \\ \text{if } u = 1 & B = 1 \end{cases}$

(1) $\rightarrow \frac{-1}{3}\int \left(\frac{+1}{u} + \frac{1}{u-1}\right) du = \frac{-1}{3}\left[+\ln u + \ln(u-1)\right] = \ln x + C$

DAYAN

$= \frac{-1}{3}\left[+\ln(y/x) + \ln(y/x - 1)\right] = \ln x + C$ □

معادله کامل: اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را در نظر بگیریم $Mdx+Ndy=0$

اگر $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ باشد، معادله کامل است.

$$\int_{x_0}^{x} M\,dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy=C$$

x_0 و y_0 اعداد هستند که ریشه مخرج M و N باشند. معمولاً $x_0=y_0=0$ اختیار می‌شود.

EX آیا معادله زیر کامل است؟

$$(\overbrace{x^2+y}^{M})dx+(\overbrace{x^2-2y}^{N})dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \longrightarrow \boxed{\text{کامل}}$$

$$\int_0^x M\,dx+\int_0^y N(0,y)\,dy=C \Rightarrow \int_0^x x^2+y\,dx+\int_0^y -2y\,dy=\frac{x^3}{3}+xy-y^2=C \quad \square$$

عامل انتگرال ساز:

چون برخی معادلات مرتبه اول کامل نیستند، عامل انتگرال ساز معرفی می‌کنیم که در معادله صورت سوال ضرب شود، معادله کامل شود و به راحتی قابل حل شود.

① اگر تابع $P(x)=\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ باشد، $\mu=e^{\int P(x)\,dx}$ را عامل انتگرال ساز اختیار کردیم.

② اگر تابع $q(y)=\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ باشد، $\mu=e^{\int q(y)\,dy}$ را عامل انتگرال ساز اختیار کردیم.

Subject:
Year: Month: Date:

-EX

الف) $\underbrace{(y+\ln x)}_{M}dx-\underbrace{x}_{N}dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=1$ $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$ $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1-(-1)}{-x}=\frac{2}{-x}$

$\rightarrow \mu=e^{\int \frac{-2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ $\square$

نکته: $e^{a\ln b}=b^{a}$

ب) $y\,dx+(2xy-e^{-2y})dy=0$

ب) $\begin{cases} M=y \\ N=2xy-e^{-2y} \end{cases}$

$\frac{\partial M}{\partial y}=1$ $\frac{\partial N}{\partial x}=2y$

$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{2y-1}{y}=2-\frac{1}{y}$

$\mu=e^{\int (2-\frac{1}{y})dy}=e^{2y-\ln y}=e^{2y}(y^{-1})=\frac{e^{2y}}{y}$

نکته: $e^{a+b}=e^{a}.e^{b}$

اگر $y'+p(x)y=q(x)$ باشد جواب این معادله بصورت زیر است

$y=\frac{1}{\mu}\left[\int \mu q(x)dx+C\right]$ که $\mu=e^{\int p(x)dx}$

Subject: Year: Month: Date:

نکته $\sec y = \dfrac{1}{\cos y}$

—EX

الف) $y' = x\sec y + \dfrac{\tan y}{x}$

$y' = \dfrac{x}{\cos y} + \dfrac{\sin y}{\cos y\, x} \rightarrow \cos y . y' = x + \dfrac{\sin y}{x}$ (1)

$\sin y = u \longrightarrow \cos y . y' = u'$

$\xrightarrow{(1)\ \text{در}} u' = x + \dfrac{u}{x} \qquad u' - \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{p(x)} u = \underbrace{x}_{q(x)}$

معادله بالا خطی است

$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$

$u = \dfrac{1}{\mu}\left[\int \mu q(x)\,dx + C\right] \qquad u = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}\left[\int \overbrace{\dfrac{1}{x}(x)}^{\text{یک}}\,dx + C\right]$

$u = x[x + C] = x^2 + Cx \longrightarrow \sin y = x^2 + Cx$ $\square$

ب) $y' = x^3 e^{x+y} - x - 1 \qquad y' = x^3 e^x . e^y - x - 1$

بر e^y تقسیم کرد

$\dfrac{y'}{e^y} = x^3 e^x + \dfrac{(-x-1)}{e^y} \Rightarrow e^{-y} y' = x^3 e^x + (-x-1)e^{-y}$ (2) $\qquad e^{-y} = u \qquad -e^{-y} y' = u'$

$\xrightarrow{(2)\ \text{در}} -u' = x^3 e^x + (-x-1)u \qquad \xrightarrow{\text{تقسیم بر } -1} u' = -x^3 e^x + (x+1)u$

$\rightarrow u' - \underbrace{(x+1)}_{p(x)} u = \underbrace{-x^3 e^x}_{q(x)}$

معادله خطی $\mu = e^{\int -(x+1)\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2} - x} \qquad u = \dfrac{1}{\mu}\left[\int \mu(-x^3 e^x)\,dx + c\right]$

$= \dfrac{1}{\mu}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2} - x}(-x^3 e^x)\,dx + c\right]$ $\square$

DAYAN

۸

تمرین

Subject:

Year: Month: Date:

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$$\left[(2y-1)\tan^{-1}xy+\frac{xy-2xy^2}{1+x^2y^2}\right]dx+\left[\frac{x^2-2x^2y}{1+x^2y^2}\right]dy=0$$

$$(2y-1)\tan^{-1}xy\,dx+\frac{(-xy)(2y-1)}{1+x^2y^2}+\frac{(-x^2)(2y-1)\,dy}{1+x^2y^2}$$

بر $2y-1$ تقسیم کرده $\rightarrow \tan^{-1}xy\,dx=\dfrac{xy\,dx+x^2dy}{1+x^2y^2}\rightarrow x(y\,dx+x\,dy)$

بر $\frac{1}{x}$ تقسیم کرده $\rightarrow \dfrac{1}{x}\tan^{-1}xy\,dx=\dfrac{y\,dx+x\,dy}{1+x^2y^2}=\dfrac{u'}{1+u^2}$ $\boxed{u=xy}$

مشتق $\tan^{-1}u$ $=d\left(\tan^{-1}xy\right)$

بر $\tan^{-1}(xy)$ تقسیم کرده $\rightarrow \dfrac{1}{x}dx=\dfrac{d\left(\tan^{-1}(xy)\right)}{\tan^{-1}(xy)}=\dfrac{d\left(\tan^{-1}(u)\right)}{\tan^{-1}(u)}$

انتگرال $\rightarrow \ln x+C=\ln\left(\tan^{-1}u\right)=\ln\left(\tan^{-1}xy\right)$ $\square$

معادله برنولی:

خطی $y'+P(x)y=q(x)$

برنولی $y'+p(x)y=q(x)y^n$

$\rightarrow \dfrac{y'}{y^n}+P(x)\longrightarrow\dfrac{y}{y^n}=q(x)$ $(n\neq 1)$

$\rightarrow y'y^{-n}+P(x)y^{1-n}=q(x)$ (1) $\quad y^{1-n}=u\xrightarrow{\text{مشتق}}(1-n)y^{-n}y'=u'$

در (1) گذاشته $\rightarrow \dfrac{u'}{(1-n)}+P(x)u=q(x)\longrightarrow u'+(1-n)P(x)u=(1-n)q(x)$ (2)

اکنون رابطه (2) یک معادله خطی بر حسب u است که قابل حل می‌باشد

Subject:
Year: Month: Date:

EX: $(y'-2xy)\sqrt{y}=x^3$

$\rightarrow y'-2xy=\frac{x^3}{\sqrt{y}}=x^3y^{-\frac{1}{2}}$ ← برنولی

$\rightarrow \frac{y'}{y^{-\frac{1}{2}}}-2x\frac{y}{y^{-\frac{1}{2}}}=x^3 \longrightarrow y'y^{\frac{1}{2}}-2xy^{1+\frac{1}{2}}=x^3$

$\rightarrow y'y^{\frac{1}{2}}-2xy^{\frac{3}{2}}=x^3$ (۲)

$\rightarrow u=y^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} u'=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y'$

در (۲) گذاشته

$\longrightarrow \frac{2}{3}u'-2xu=x^3$

$\rightarrow \overbrace{u'-3xu}^{p(x)}=\frac{3}{2}x^3 \xrightarrow{\text{معادله خطی}}$

$u=\frac{1}{\mu}\left[\int \mu q(x)\,dx+c\right] \rightarrow \mu=e^{\int p(x)\,dx}=e^{\int -3x\,dx}=e^{-\frac{3x^2}{2}}$ □

معادله کلرو

$y=xy'+f(y')$ یعنی f تابعی برحسب y' است.

برای حل این معادله کافی است $y'=p$ گذاشته، پس از طرفین مشتق گرفته و با ساده‌سازی به معادله خطی، برنولی، جدای پذیر و..... تبدیل شود که قابل حل است.

$y=xp+f(p) \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)$

Subject:
Year: Month: Date:

معادله لاگرانژ:

$$y = x\,\phi(y') + f(y')$$

مشابه معادله کلرو قابل حل است.

Ex: $y = xy' + \frac{1}{y'}$

$y' = p \qquad f(y')$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y' = p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{0 - 1\frac{dp}{dx}}{p^2}$$

$$\to \cancel{p} = \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) \to \frac{dp}{dx}\left[x - \frac{1}{p^2}\right] = 0$$

if $\frac{dp}{dx} = 0 \qquad p = c \qquad y' = c \xrightarrow{\text{انتگرال}} y = cx + c$

if $x - \frac{1}{p^2} = 0 \to x = \frac{1}{p^2} \to p^2 = \frac{1}{x} \qquad p = \pm\frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\to y' = \pm\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{جدا پذیر}} dy = \pm\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\to y + c = \pm\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \qquad \square$$

Note $\left\{ \frac{\text{مشتق مخرج}}{\text{مخرج کسر}} = Ln\,(\text{مخرج کسر}) \right.$

note: درصورتی که معادله ا برحسب ۲ مشتق متوالی y داشته باشیم (یعنی) $y^{(n)}$ ، $y^{(n-1)}$ داشته باشیم، برای حل کافی است $y^{(n-1)} = u$ سپس در رابطه گذاشته و مشتق گرفته و معادله را حل می کنیم.

Ex: $x^2 y''' + x y'' = x + 1 \qquad y'' = u \qquad y''' = u'$

$$\to x^2 u' + u x = x + 1 \qquad u' + \frac{1}{x}u = \frac{x+1}{x^2}$$

خطی

$p(x) \qquad q(x)$

$$\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln x} = x$$

$$u = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu\, q(x)\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[\int \cancel{x}\,\frac{(x+1)}{x^2}\,dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int \frac{x+1}{x}\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left[x + \ln x + c\right]$$

$$\int 1+\frac{1}{x}\,dx = x + \ln x \xrightarrow[\text{دوبار انتگرال گرفته تا y بدست آید}]{} y' = 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{c}{x} \quad \square$$

note) اگر معادله به صورت زیر باشد $F(x, y', y'')=0$ ، دراینصورت $y'=u$ گرفته

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = u\,\frac{du}{dy}$$

برای حل اینگونه مسائل کافی است $y'=u$ گذاشته و $y''=u\frac{du}{dy}$ ومسئله قابل حل می شود.

Ex: $yy'' + y'(y'-1)=0$ $\quad \begin{cases} y'=u \\ y''=u\frac{du}{dy} \end{cases}$

$$y\,u\,\frac{du}{dy} + u(u-1)=0 \xrightarrow{\text{بر u تقسیم}} y\,\frac{du}{dy} + (u-1)=0$$

$$\xrightarrow{\text{جداپذیر}} \frac{du}{u-1} = -\frac{dy}{y} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln(u-1) = -\ln y + c$$

$$\to \ln(u-1) + \ln y = c$$

note) $\ln a + \ln b = \ln(ab)$

نکته

$$\ln[(u-1)y] = c = \ln c_1 \to (u-1)y = c_1$$

$$\to (u-1) = \frac{c_1}{y} \to y'-1 = \frac{c_1}{y} \qquad y' = 1 + \frac{c_1}{y} \to$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+c_1}{y} \xrightarrow{\text{جداپذیر}} \frac{y}{y+c_1}\,dy = \frac{dx}{1}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \frac{y+c_1-c_1}{y+c_1}\,dy = \int 1 - \frac{c_1}{c_1+y}\,dy$$

$$= y - c_1 \ln(y+c_1) = x + c_2$$

I

(note در صورتی که در معادله دیفرانسیل فقط x ، $y^{(n-1)}$ و $y^{(n)}$ موجود باشد و $G(x, y^{(n-1)}, y^{(n)})$ در اینصورت کافی است $y^{(n-1)} = u$ سپس $y^{(n)} = u'$ و معادله اصلی به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول (۱) قابل تبدیل است.

(note $G(y, y', y'') = 0$ در صورتی که y و y' و y'' در داخل تابع نهفته باشد

$$y' = u \to y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$$

$\frac{dy}{dx} \to u$

قاعده زنجیره‌ای

سپس معادله به راحتی قابل حل است.

① ~~$y' + P(x)y = q(x)$~~ $y' + P(x)y + q(x)y^2 = r(x)$ Ricatti ریکاتی

در صورتی که $y_1 = u$ جواب مسئله را داشته باشد

سپس $y = u + \frac{1}{v}$ که v مجهول (متغیر) با مشتق گیری از سطر بالا و گذاشتن

در رابطه (۱) داریم $v' - \left(2u\,q(x) + p(x)\right) v = q(x)$

که معادله بالا (خطی مرتبه ۱) که قابل حل است.

Note) برای حل اینگونه معادلات کسری $y = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ کافی است صورت و مخرج را جداگانه مساوی با صفر قرار دهیم (یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول بدست آید) با حل دستگاه یک جواب برای x و یکی برای y داریم، با تغییر متغیر و استفاده از این جواب ها معادله به قابل حل تبدیل می شود

$$\begin{cases} x = X + d_1 \\ y = Y + d_2 \end{cases} \quad (2)$$

که d_2, d_1 جواب دستگاه مذکور باشد

□ از (۲) مشتق گرفته $y' = Y'$

EX) $yy'' + 2y' = 2(y')^2$ از نکته (I) استفاده می کنیم

$y' = u \qquad y'' = u\dfrac{du}{dy}$

$yu\dfrac{du}{dy} + 2u = 2u^2 \qquad u\left[y\dfrac{du}{dy} + 2 - 2u\right] = 0$

if $u = 0 \to y' = 0 \qquad y = c$

if $y\dfrac{du}{dy} - 2u + 2 = 0 \Rightarrow \dfrac{du}{dy} \underbrace{-\dfrac{2}{y}}_{P(y)} u = \underbrace{\dfrac{-2}{y}}_{q(y)}$

معادله خطی برحسب u

$u = \dfrac{1}{\mu}\left[\int \mu\, q(y)\,dy + c\right], \quad \mu = e^{\int p(y)\,dy}$ □

(EX-1)

$$\underbrace{y' + (2x-1)}_{p(x)}\, \underbrace{y - y^2}_{q(x)} = \underbrace{x^2 - x + 1}_{r(x)} \qquad u = x \qquad y_1 = x = u$$

$$v' - \left(2\cancel{x}(-1) + \cancel{2x} - 1\right) v = -1 \quad \to v' + v = -1 \to v = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu(-1)\,dx + c\right]$$

$$\mu = e^{\int 1\,dx} = e^{x} \to v = \frac{1}{e^{x}}\left[\int -e^{x}\,dx + c\right]$$

$$\to v = e^{-x}\left[-e^{x} + c\right] = -1 + ce^{-x} \qquad y = u + \frac{1}{v} = x + \frac{1}{-1 + ce^{-x}} \quad \square$$

EX ۲) $y' = \dfrac{x+2y-7}{2x+y-5}$ $\qquad (-2)\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$ ①

$-3y + 14 - 5 = 0 \qquad -3y = -9 \qquad y = 3$

① $\to x + 6 - 7 = 0 \longrightarrow x = 1 \qquad \begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+3 \to y' = Y' \end{cases}$

درصورت سوال گذاشته

$$Y' = \frac{(X+1) + 2(Y+3) - 7}{2(X+1) + (Y+3) - 5} = \frac{X+2Y}{2X+Y}$$

همگن $\longrightarrow Y' = \dfrac{1 + 2\frac{Y}{X}}{2 + \frac{Y}{X}}$ $\quad \begin{cases} \frac{Y}{X} = u \to Y = Xu \\ \xrightarrow{\text{مشتق}} Y' = u + X\dfrac{du}{dX} \end{cases}$

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{1+2u}{2+u} \to X\frac{du}{dX} = \frac{1+2u}{2+u} - u = \frac{1+2u-2u-u^2}{2+u}$$

$\to X\dfrac{du}{dX} = \dfrac{1-u^2}{2+u}$ جدایی پذیر $\to \dfrac{2+u}{1-u^2}\,du = \dfrac{dX}{X}$ $\xrightarrow{\text{انتگرال}}$

تجزیه کسر و انتگرال

مثال)

الف) $y''=\frac{y'}{x}\left(1+\ln\left(\frac{y'}{x}\right)\right)$ hint $\begin{cases}\ln y'=u\\ \frac{y''}{y'}=u'\end{cases}$

ب) $yy''+y'^2=y'^3\ln y$ hint $\begin{cases}y'=u\\ y''=u\frac{du}{dy}\end{cases}$

حل الف) $y''=\frac{y'}{x}(1+\ln y'-\ln x)$

بر y' تقسیم کرد $\longrightarrow \frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}(1+\ln y'-\ln x)\longrightarrow u'=\frac{1}{x}(1+u-\ln x)$

$\xrightarrow{\text{معادله خطی}} u'-\underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)}u=\underbrace{\frac{1}{x}(1-\ln x)}_{q(x)}$ $\mu=e^{\int p(x)\,dx}=e^{\int -\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$

$u=\frac{1}{\mu}\left[\int \mu q(x)\,dx+c\right]=x\left[\int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\,dx+c\right]$

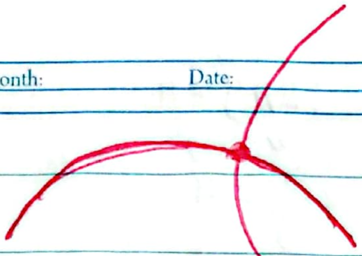
حل ب) $yu\frac{du}{dy}+u^2=u^3\ln y$

بر u تقسیم کرد $\longrightarrow y\frac{du}{dy}+u=u^2\ln y$ $\xrightarrow{\text{بر } y \text{ تقسیم کرده، بر } u^2 \text{ تقسیم کرد}}$ برنولی

$\xrightarrow{\text{برنولی}} \frac{1}{u^2}\frac{du}{dy}+\left(\frac{1}{y}\right)\frac{u}{u^2}=\frac{\ln y}{y}\longrightarrow u^{-2}\frac{du}{dy}+\frac{1}{y}u^{-1}=\frac{\ln y}{y}$ $\begin{cases}u^{-1}=T\\ -u^{-2}u'=T'\end{cases}$

$\longrightarrow -T'+\frac{1}{y}T=\frac{\ln y}{y}\xrightarrow{\text{خطی}} T'-\frac{1}{y}T=-\frac{\ln y}{y}$

$\mu=e^{\int -\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln y}=\frac{1}{y}\longrightarrow T=\frac{1}{\mu}\left[\int \mu q(y)\,dy+c\right]$

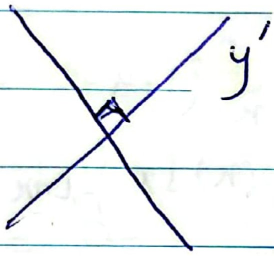


فصل ۳ (معادله دسته منحنی قائم)

برای پیدا کردن دسته منحنی قائم، کافی است از دسته منحنی صورت مسئله، مشتق گرفته y' ایجاد می‌شود چون منحنی های قائم متعامد است به جای y'، $\frac{-1}{y'}$ گذاشته و معادله جدید را حل می‌کنیم. اکنون جواب بدست آمده، همان دسته منحنی قائم متعامد است.

$\frac{-1}{y'}$

$\alpha = \frac{-1}{m}$



y'

$y = mx$

EX) مسیر قائم دسته منحنی

الف) $x^2 - y^2 = c$

ب) $y = x + ce^{-x}$

حل الف) $2x - 2yy' = 0 \to x = yy'$ $\quad y' \to \frac{-1}{y'}$

$$x = y\left(\frac{-1}{y'}\right) = y\left(\frac{-1}{\frac{dy}{dx}}\right) = y\left(\frac{-dx}{dy}\right)$$

جداپذیر $\to \frac{dy}{y} = \frac{-dx}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \ln y = -\ln x + c$

$$\ln y = -\ln x + \ln c_1 = \ln \frac{c_1}{x}$$

حل ب) $y - x = ce^{-x}$ $\quad c = \frac{y-x}{e^{-x}} = e^{x}(y-x)$ (۲)

$y = x + ce^{-x}$

مشتق $\to y' = 1 + (-c)e^{-x} = 1 - ce^{-x}$

$y' = 1 - ce^{-x} \xrightarrow{\text{(۲) گذاشته به جای } c} y' = 1 - e^{x}(y-x)e^{-x}$

$y' = \frac{-1}{y'} \xrightarrow{\text{مسیر قائم}} \frac{-1}{y'} = 1 - (y-x) = 1 - y + x$

$$\frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = 1 - y + x \to \frac{-dx}{dy} = 1 - y + x$$

DAYAN

Subject:

Year: Month: Date:

y خطی برحسب $\longrightarrow \dfrac{dx}{dy}+x=y-1 \quad \begin{cases} P(y)=1 \\ q(y)=y-1 \end{cases}$

$\mu = e^{\int p(y)\,dy} = e^{\int 1\,dy} = e^{y}$ $\qquad x=\dfrac{1}{\mu}\left[\int \mu q(y)\,dy + c\right]$

$= \dfrac{1}{e^{y}}\left[\int e^{y}(y-1)\,dy + c\right]$ ③

	مشتق	انتگرال
$+$	$y-1$	e^{y}
$-$	1	e^{y}
$+$	0	e^{y}

$\Rightarrow$ ③ $= e^{-y}\left[(y-1)e^{y}+c\right]$ □

فصل چهار (حل معادلات دیفرانسیل مرتبه ۲ و بالاتر)

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲:

① $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

اگر $f(x)=0$ باشد، معادله همگن است و فقط جواب عمومی داریم.

$y_g = c_1y_1+c_2y_2$

general ← g

اگر $f(x)\neq 0$ باشد، علاوه بر جواب عمومی y_g و جواب خصوصی y_p نیز دارد:

جواب کل ← $y_{total} = y_g + y_p$ → جواب خصوصی

y_g → جواب عمومی

(note اگر y''' داشته باشیم، $y_g = c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3$

Subject:
Year: Month: Date:

note) درصورتی که $p(x)$ (ضرب y' در ①) و $q(x)$ (ضرب y) اعداد ثابت باشند، به راحتی می توان با کمک چند جمله ای مشخصه، جواب عمومی را بدست آورد

note) درصورتی که $p(x)$ در ① و $q(x)$ تابعی برحسب x باشند، در اینصورت با داشتن حداقل یکی از آنها y_1 و y_2 را می توان از فرمول آبل (Abel) بدست آورد،

$$y_2 = y_1 \left[\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} \, dx \right]$$

note) برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ و یا بالاتر، ابتدا کافی است فرض کنیم $f(x)=0$ باشد، پس ابتدا جواب عمومی را بدست آوردن، سپس سراغ جواب خصوصی y_p می رویم

note) (معادله مشخصه)

$y''-2y'=4x \rightarrow f(x)=4x$ ناهمگن

$1 \leftarrow y$

$\lambda \leftarrow y'$

$\lambda^2 \leftarrow y''$

$\lambda^3 \leftarrow y'''$

$\lambda^2-2\lambda=0 \qquad \lambda(\lambda-2)=0 \rightarrow \lambda=0, \ \lambda=2$

$y_g = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} = c_1 + c_2 e^{2x}$ $\square$

note) نکاتی مربوط به نوشتن جواب عمومی برحسب معادله مشخصه

i) اگر $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}$ باشند (متمایز حقیقی) در اینصورت $y_g = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

ii) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ که $\begin{cases} \lambda_1 = a+ib \\ \lambda_2 = a-ib \end{cases}$ آنگاه $y_g = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right]$

iii) اگر $\lambda_1=\lambda_2 \in \mathbb{R}$ باشد (ریشه تکراری) در اینصورت

$$y_g = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

(بخاطر تکراری بودن)

Note) اگر $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3 \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه

$$y_g = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} + c_3 x^2 e^{\lambda_1 x}$$

EX) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $y'' + y' - 2y = 0$

ب) $y''' - 3y' + 2y = 0$

ج) $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$

د) $y^{3} + 8y = 0$

حل الف) $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \qquad (\lambda+2)(\lambda-1)=0 \qquad \begin{cases} \lambda=-2 \\ \lambda=1 \end{cases}$

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

حل ب) $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ ① از روش امتحان کردن (پیدا کردن ۱ ریشه) استفاده میکنیم

$\lambda=1 \quad \lambda=-1 \quad \lambda=0 \quad \lambda=\frac{1}{2} \quad \lambda=\frac{-1}{2} \quad \lambda=2 \quad \lambda=-2$ و ....

if $\lambda=1 \xrightarrow{①} 1-3+2=0$ ✓

چون $\lambda=1$ ریشه است کافی است بر (ریشه - λ) تقسیم کنیم

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^3 - 3\lambda + 2 & \lambda - 1 \\
\hline
-(\lambda^3 - \lambda^2) & \lambda^2 + \lambda - 2 \\
\lambda^2 - 3\lambda + 2 & \downarrow \\
-(\lambda^2 - \lambda) & (\lambda+2)(\lambda-1) \\
-2\lambda + 2 & \lambda=1 \\
-(-2\lambda + 2) & \lambda=-2
\end{array}$$

$$y_g = c_1 e^{1x} + \underbrace{c_2 x e^{1x}}_{\text{تکرار}} + c_3 e^{-2x} \quad \square$$

ج-ط) $\lambda^2(\lambda^4-1)+(\lambda^4-1)=(\lambda^4-1)(\lambda^2+1)$

$(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=\qquad \lambda=\pm i$

$\lambda=\pm 1 \qquad \lambda=\pm i$

$-i\left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow e^{-x}\left(c_4\cos(-x)+c_5(\sin(-x)+xe^{-x}\right)+xe^{-x}\left[c_6(\cos(-x)+c_7(\sin(-x)\right.$

$i\left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \end{array}\right. \Rightarrow e^{0x}(c_8\cos 1x+c_9\sin 1x)+xe^{0x}(c_{10}\cos 1x+c_{11}\sin 1x)$

$y_g=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+e^{-x}\left(c_4\cos(-x)+c_5\sin(-x)\right)+xe^{-x}\left(c_6\cos(-x)+\right.$

$\left. c_7\sin(-x)\right)+e^{0x}(c_8\cos 1x+c_9\sin 1x)+xe^{0x}(c_{10}\cos x+c_{11}\sin x)$

د) $y'''+8y=0 \qquad \lambda^3+8=0 \qquad \lambda=-2$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3+8 & \lambda+2 \\ \cline{2-2} -(\lambda^3+2\lambda^2) & \lambda^2-2\lambda+4 \\ \hline -2\lambda^2+8 & \\ -(-2\lambda^2-4\lambda) & \\ \hline 4\lambda+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 4=-12$

$\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{4\pm\sqrt{-12}}{2}$

$\alpha=2\pm\sqrt{2}\,i < \begin{array}{l} 1+\sqrt{3}\,i \\ 1-\sqrt{3}\,i \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=\sqrt{3} \end{array}\right.$

$y_g=e^{1x}(c_1\cos\sqrt{3}\alpha+c_2\sin\sqrt{3}x)+$
$e^{1x}(c_3\cos-\sqrt{3}x+c_4\sin-\sqrt{3}x)+$
c_5e^{-2x}

EX)

الف) $y''-5y'+6y=0$

ب) $y''-y'-2y=0$

ج) $y''+y=0$

حل الف) $\lambda^2-5\lambda+6=0$

$(\lambda-3)(\lambda-2)=0 \quad \lambda=3 \quad \lambda=2$

$y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

حل ب) $\lambda^2-\lambda-2=0 \quad (\lambda-2)(\lambda+1)=0 \quad \boxed{\lambda=2} \quad \boxed{\lambda=-1}$

$y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$

حل ج) $\lambda^2+1=0 \quad \lambda^2=-1 \quad \lambda=\pm i \quad \overbrace{a+ib \quad a-ib} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

$y_g=e^{x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$

note) (محاسبه جواب عمومی برای زمانی که ضرایب y' و y'' و y و عدد ثابت نباشند و تابعی برحسب x باشند)

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

ابتدا فرض کنیم $f(x)=0$ و دنبال جواب عمومی y_g مسئله بگردیم.

اگر فرض کنیم y_1 یک جواب عمومی مسئله به ما داده شده باشد، y_2 را از آبل می‌رویم.

$$y_2=y_1\left[\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx\right]$$

EX)

الف) $x^2y''+xy'-4y=x \qquad (y_1=x^2)$

ب) $\underbrace{y''-(2\cot x)}_{p(x)}y'\underbrace{-3y}_{q(x)}=\frac{2}{\sin x} \quad f(x)$

$y_1=\cos x$

حل الف) بر x^2 تقسیم $\longrightarrow$ $y'' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)}y' - \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{q(x)}y = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$

آبل

$$y_2 = x^2\left[\int \frac{1}{(x^2)^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx\right] = x^2\left[\int \frac{1}{x^4}\, \underbrace{e^{-\ln x}}_{\frac{1}{x}}\, dx\right]$$

$$= x^2\left[\int x^{-5}dx\right] = x^2\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right) = \frac{x^{-2}}{-4} \qquad y_g = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x^2 + c_2\left(\frac{x^{-2}}{-4}\right)$$

□

حل ب) $y_2 = \cos x\left[\int \frac{1}{\cos^2 x} e^{+\int \frac{2\cos x}{\sin x}dx} dx\right]$

$$= \cos x\left[\int \frac{1}{\cos^2 x}\, \underbrace{e^{2\ln(\sin x)}}_{\sin^2 x}\, dx\right] = \cos x\left[\int \tan^2 x\, dx\right]$$

$\boxed{\text{نکته}\quad e^{a\ln b} = b^a}$

$$y_2 = \cos x\left[\int \underbrace{\tan^2 x + 1}_{\tan x}\ \underbrace{-1}_{-x}\, dx\right]$$

$$= \cos\left[\frac{\sin x}{\cos x} - x\right] = \sin x - x\cos x$$

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\cos x + c_2(\sin x - x\cos x)$$ □

note) محاسبه جواب خصوصی y_p ($f(x) \neq 0$ زمانی)

روش تغییر پارامتر یکی از روش های محاسبه جواب خصوصی است، ابتدا y_1 و y_2 را بدست می آوریم، در اینصورت

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{\underbrace{w}_{\text{رونسکی}}}dx$$

$$\omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad V_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{\omega} dx$$

دترمینان ←

حل الف) (بدست آوردن جواب خصوصی)

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)}$$

$$y_1 = x^2 \quad , \quad y_2 = \frac{x^{-2}}{-4}$$

$$\omega = \begin{vmatrix} x^2 & \frac{x^{-2}}{-4} \\ 2x & \frac{-2}{-4} x^{-3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$V_1 = \int \frac{\frac{x^{-2}}{-4}}{\frac{x^{-1}}{1}} \cdot \frac{1}{x} dx = t \int \frac{x^{-2}}{4 \cancel{x^{-1}}} \cancel{x^{-1}} dx = \int \frac{x^{-2}}{4} dx$$

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) = \frac{-1}{4x} \qquad V_2 = \int \frac{x^2 \cancel{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x}}} dx = \frac{x^3}{3}$$

$$= \left(\frac{-1}{4x} \right) x^2 + \left(\frac{x^3}{3} \left(\frac{x^{-2}}{-4} \right) \right) \quad \square$$

حل ب)

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x - x \cos x$$

$$V_1 = -\int \frac{y_2 \, 2 \sin x}{\omega} \qquad \omega = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x - x \cos x \\ -\sin x & \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x \sin x \end{bmatrix}$$

$$= x \sin x \cancel{\cos x} + \sin^2 x \cancel{- x \cos x \sin x} = \sin^2 x$$

$$V_1 = -2 \int \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} dx = -2 \int \frac{1}{\sin^2 x} + 2 \boxed{\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx} \Rightarrow$$ صفحه بعد

$$1 + \tan^2 x \qquad -2(-\cot x)$$

DAYAN

$\cot x \qquad 1+\cot^2 x$

محاسبه

$$I=\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx=\int x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

	مشتق	انتگرال
$+$	x	$\cot x(1+\cot^2 x)$
$-$	1	$\frac{-\cot^2 x}{2}$
$+$	0	$\frac{-1}{2}(-\cot x-x)$

$$-\frac{1}{2}\int \cot^2 x\,dx=\frac{-1}{2}\int \cot^2+1-1$$

$$=\frac{-1}{2}(-\cot-x)$$

$$I=x\left(\frac{-\cot^2 x}{2}\right)+\frac{1}{2}(-\cot-x)$$

$$I=x\left(\frac{-(\cot^2 x)}{2}\right)+\frac{1}{2}(-\cot x-x)$$

$$V_2=\int \frac{\cos x\,\frac{2}{\sin x}}{\sin^2 x}\,dx=\int \frac{2\cos x}{\sin^3 x}\,dx=2\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx=$$

$$2\left(\frac{-\cot^2 x}{2}\right) \quad \square$$

(EX

الف) $4y''-4y'+y=e^{\frac{x}{2}}\ln x$

ب) $9y''+y=\tan^2\left(\frac{x}{3}\right)$

حل الف) $4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2=0$ مضاعف $\lambda=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y_1=e^{\frac{1}{2}x}\\ y_2=xe^{\frac{1}{2}x}\end{cases}$$

$① \rightarrow y''-y'+\frac{1}{4}y=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\ln x$ $f(x)$

DAYAN

۳۵

Subject: Year: Month: Date:

$$v_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{\omega}\,dx \qquad \omega = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\frac12 x} & xe^{\frac12 x} \\ \frac12 e^{\frac12 x} & e^{\frac12 x}+\frac12 xe^{\frac12 x} \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{e^{x} + \frac12 xe^{x} - \frac12 xe^{x} = e^{x}} \qquad v_1 = -\int \frac{xe^{\frac12 x}}{e^{x}}\left(\frac14 e^{\frac{x}{2}} \ln x\right)dx$$

$$= -\frac14 \int x\ln x\,dx = -\frac14\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx\right)$$

$$\begin{cases} \ln x = u \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac1x\,dx = du \\ x\,dx = dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{x^2}{2} = v \end{cases}$$

$$v_1 = -\frac14\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) \qquad v_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{\omega}\,dx$$

$$= \int \frac{e^{\frac12 x}}{e^{x}}\,\frac14 e^{\frac{x}{2}}\ln x\,dx \Rightarrow \frac14\int \ln x\,dx = \frac14\left(x\ln x - \int 1\,dx\right) =$$

$$= \frac14(x\ln x - x) \qquad \begin{cases} \ln x = u \\ dx = dv \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac1x\,dx = du \\ x = v \end{cases}$$

$$y_p \to v_1 y_1 + v_2 y_2 \longrightarrow y_{total} = y_g + y_p \qquad \square$$

(حل ب) $9\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm \frac13 i$

$$y_g = \underbrace{e^{0x}}_{\text{یک}}\left(\underbrace{c_1 \cos\frac13 x}_{y_1} + \underbrace{c_2 \sin\frac13 x}_{y_2}\right) \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \frac13 \end{aligned}$$

(۲) $\longrightarrow y'' + \frac19 y = \overbrace{\frac19 tg^2\left(\frac{x}{3}\right)}^{f(x)}$

DAYAN

۲ حل تا همین مرحله کافی است ✪

$$v_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{\omega} dx \qquad \omega = \begin{vmatrix} \cos\frac{1}{3}x & \sin\frac{1}{3}x \\ -\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}x & \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\sin^2\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \qquad v_1 = -\int \frac{\sin\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}\tan^2(\frac{x}{3})\, dx$$

$$= \frac{-1}{3}\int \sin\frac{1}{3}x \cdot \tan^2(\frac{x}{3})\, dx = \frac{-1}{3}\int \sin\frac{1}{3}x \left[\tan^2\frac{x}{3}+1-1\right] dx$$

$$= \frac{-1}{3}\Big[\underbrace{\int \sin\frac{1}{3}x\left(\tan^2\frac{x}{3}+1\right)}_{\text{جز به جز}} - \underbrace{\int \sin\frac{1}{3}\, dx}_{-3\cos\frac{1}{3}x}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{1}{3}x = u \\ (\tan^2\frac{x}{3}+1)dx = dv \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x\, dx = du \\ 3\tan\frac{x}{3} = v \end{cases}$$

$$I_1 = 3\tan\frac{x}{3}\left(\sin\frac{1}{3}x\right) - \left(-3\cos\frac{x}{3}\right)$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{\omega} dx = \int \frac{\cos\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}\tan^2\frac{x}{3}\, dx$$

شما به قبلی می رسیم $\square$

معادله اولر مرتبه دوم و بالاتر :

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

برای حل این گونه معادلات $x = e^t$ ← پس داریم ← $\ln x = t$

$$y \to y \qquad xy' \to Dy \qquad x^2y'' \to D(D-1)y \qquad x^3y''' \to D(D-1)(D-2)y$$

Subject: Year: Month: Date:

سپس به یک معادله قابل حل می‌رسیم.

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x$$

$$D(D-1)y - 4Dy + 6y = t$$

اولی مرتبه دو

$$[D^2 - D - 4D + 6]y = t \qquad [D^2 - 5D + 6]y = t \quad (1)$$

$$[D-3][D-2]y = t = f(t) \qquad y_g = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

$D=3 \qquad D=2$

روش اول این است که از V_1 و V_2 و ω جواب خصوصی را بدست آوریم

روش دوم: $f(t) = t$ یک چندجمله‌ای درجه 1 می‌باشد پس $y_p = At + B$

$$Dy = A \Rightarrow D^2y = 0 \qquad (1)\ 0 - 5A + 6[At + B] = t$$

عدد ثابت $-5A + 6B = 0 \rightarrow B = \frac{5}{6}A = \frac{5}{36}$

$$y_p = \frac{5}{36}t + \frac{1}{6} = \frac{5}{36}\ln x + \frac{1}{6}$$

$$y_{total} = y_g + y_p \qquad \square$$

نکته: ابتدا برای حل معادله دیفرانسیل جواب عمومی آن را بدست می‌آوریم.

i) اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای برحسب x درجه n باشد و α) اگر $\lambda=0$ ریشه معادله

مشخصه نباشد $y_p = (Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + E)$

b) اگر $\lambda = 0$ ریشه معادله مشخصه با تکرار ۲ (درجه) باشد

$y_p = x^2 [Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + E)$

ii) اگر $f(x)$ برحسب تابع نمایی e^{ax} باشد

a) اگر $\lambda = a$ ریشه معادله مشخصه نباشد، $y_p = Ae^{ax}$

b) اگر $\lambda = a$ ریشه معادله مشخصه با درجه تکرار ۲ باشد $y_p = Ax^2 e^{ax}$

iii) اگر $f(x)$ برحسب $\sin b(x)$ یا $\cos b(x)$ باشد

a) اگر $\lambda = bi$ ریشه معادله مشخصه نباشد $y_p = A\cos bx + B\sin bx$

b) اگر $\lambda = bi$ ریشه معادله مشخصه با درجه تکرار ۲ باشد

$y_p = x^2 (A\cos bx + B\sin bx)$

iv) اگر $f(x)$ بصورت حاصل ضرب از یک چند جمله‌ای / نمایی باشد چون از جنس با نمایی e^{ax} است.

a) اگر $\lambda = a$ ریشه معادله مشخصه نباشد $y_p = e^{ax}(Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + E)$

b) اگر $\lambda = a$ ریشه معادله مشخصه با درجه تکرار ۲ باشد

$y_p = x^2 e^{ax} [Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + E]$

۷) اگر $f(x)$ حاصل ضرب های e^{ax} و مثلثات $\sin bx$ یا $\cos bx$ باشد

a) اگر $\lambda = a+ib$ ریشه معادله مشخصه نباشد $y_p = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$

b) اگر $\lambda = a+ib$ ریشه معادله مشخصه با درجه تکرار ۲ باشد.

$$y_p = x^2 e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx)$$

vi) اگر $f(x)$ بصورت حاصل ضرب یک چندجمله‌ای درجه n و $\sin bx$ یا $\cos bx$ باشد

a) اگر $\lambda = bi$ ریشه معادله مشخصه نباشد

$$y_p = (A_1 \sin bx + B_1 \cos bx)(Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + E)$$

b) اگر $\lambda = bi$ ریشه معادله مشخصه با درجه تکرار ۲ باشد

$$y_p = x^2(A_1 \sin bx + B_1 \cos bx)(Ax^n + \dots + E)$$

Ex)

i) $y'' - 2y' = e^{x}\sin x$

ii) $y'' + y' + y = e^{x}\sin 3x$

iii) $y''' - 2y'' = x^3 + 1$

iv) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

v) $y'' + 16y = \sin(4x + \alpha)$

α اسکالر

حل i)

$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda(\lambda-2) = 0 \quad \begin{cases}\lambda = 0\\ \lambda = 2\end{cases}$

$y_g = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x}$

چون $f(x) = e^{x}\sin x$ (حاصلضرب نمایی $a=1$ و مثلثات و $b=1$ است، هر ۲ از لحاظ ارزش یکی اند $\lambda = a + ib = 1 + i$ و ریشه معادله مشخصه نیست، پس)

$y_p = e^{x}(A\cos x + B\sin x) = Ae^{x}\cos x + Be^{x}\sin x$

* هدف پیدا کردن A و B می باشد.

$y' = Ae^{x}\cos x - Ae^{x}\sin x + Be^{x}\sin x + Be^{x}\cos x$

$y'' = Ae^{x}\cos x - Ae^{x}\sin x - Ae^{x}\sin x - Ae^{x}\cos x + Be^{x}\sin x + Be^{x}\cos x + Be^{x}\cos x - Be^{x}\sin x$

اکنون در صورت سئوال گذاشته

ضریب $e^{x}\sin$: $\quad -2A + B - B - 2(-A + B) = 1$

$-2A + 2A - 2B = 1 \qquad B = -\frac{1}{2}$

ضریب $e^{x}\cos x \Rightarrow A - A + 2B - 2(A + B) = 0 \qquad \boxed{A = 0}$

حل ii)

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

$y_g = e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

چون $f(x) = e^{x}\sin 3x$ از طرفی $\lambda = 1 + 3i$ ریشه معادله مشخصه باشد

$y_p = e^{x}\left[A\cos 3x + B\sin 3x\right]$

سپس در صورت مسئله گذاشته و A و B را بدست می آوریم.

Subject: Date:
Year Month

(حل iii

$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 2$

$y_g = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{2x}$

$y_g = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}$

$y_p = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \qquad Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2$

$y' = 5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx$

$y'' = 20Ax^3 + 12x^2B + 6Cx + 2D$

$y''' = 60Ax^2 + 24Bx + 6C$

(در صورت مسئله گذاشته

ضریب x^3 $\Rightarrow 0 - 2(20A) = 1$ (ضریب x^3 سمت راست صورت سؤال)

$\boxed{A = \frac{-1}{40}}$ ضریب x^2 $\to 60A - 2(12B) = 0$

$B = \frac{60A}{24} = \frac{\cancel{60}\left(\frac{-1}{\cancel{40}}\right)}{24} = \frac{-1}{16}$ $\qquad \boxed{C = \frac{-1}{8}}$

ضریب x $\Rightarrow 24B - 2(6C) = 0 \Rightarrow C = 2B \qquad C = 2 \times \frac{-1}{16}$

عدد ثابت $\Rightarrow 6C - 2(2D) = 1$

$6\left(\frac{-1}{8}\right) - 2(2D) = 1 \to -4D = 1 + \frac{3}{4}$

$-4D = \frac{7}{4} \to D = \frac{-7}{16}$

DAYAN

حل ۱۱۷

$\lambda^2+9=0 \quad \lambda=\pm 3i \quad \begin{cases} a=0 \\ b=3 \end{cases}$

$y_g=\underbrace{e^{0x}}_{1}\left[c_1\cos 3x+c_2\sin 3x\right] \qquad F(x)=\underbrace{x^2}_{\text{چند جمله ای درجه ۲}}\ \underbrace{e^{3x}}_{\text{با درگیری نمایی}}+\underbrace{6}_{\text{چند جمله ای درجه صفر}}=f_1+f_2$

چون ارزش نمایی بیشتر است و $\lambda=3$ ریشه معادله مشخصه نیست

پس (مربوط به f_1) $\quad y_{p_1}=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$

$y=Ax^2e^{3x}+Bxe^{3x}+Ce^{3x}$

$y'=2Axe^{3x}+3Ax^2e^{3x}+Be^{3x}+3Bxe^{3x}+3Ce^{3x}$

$y''=2Ae^{3x}+6Axe^{3x}+6Axe^{3x}+9Ax^2e^{3x}+3Be^{3x}+3Be^{3x}+9Bxe^{3x}+9Ce^{3x}$

(در صورت مسئله گذاشته)

ضریب $x^2e^{3x} \longrightarrow 9A+9(A)=1 \qquad A=\frac{1}{18}$

ضریب $xe^{3x} \longrightarrow 6A+6A+9B+9(B)=0$

$12A+18B=0 \quad B=\frac{-12}{18}A \rightarrow \frac{-12}{18}\left(\frac{1}{18}\right)=\frac{-12}{(18)^2}$

ضریب $e^{3x} \longrightarrow 2A+3B+3B+9C+9(C)=0 \qquad 2A+6B+18C=0$

$2\left(\frac{1}{18}\right)+\frac{6(-12)}{(18)^2}+18C=0$ C بدست آید

$y_{p_2}=A \rightarrow y'=0 \rightarrow y''=0$ در صورت مسئله گذاشته

$f_2=6$ مربوط به y_{p_2}

درصورت مسئله گذاشته

$(y''+9y=6)$ $\quad 0+9A=6 \quad A=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

$y=y_{p_1}+y_{p_2} \qquad y=P\,(total)$ $\square$

حل ۷)

$\lambda^2+16=0 \quad \lambda=\pm 4i \quad \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=4 \end{cases}$

$y_g=\underbrace{e^{0x}}_{\text{یک}}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)$

نکته = $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(4x+\alpha)=\sin 4x\underbrace{\cos\alpha}_{\text{عدد}}+\cos 4x\underbrace{\sin\alpha}_{\text{عدد}}=f(x)$

چون $\lambda=4i$ ریشه معادله مشخصه با درجه تکرار یک است

$y_p=x(A\cos 4x+B\sin 4x)=Ax\cos 4x+Bx\sin 4x$

$y'=A\cos 4x-4Ax\sin 4x+B\sin 4x+4Bx\cos 4x$

$y''=-4A\sin 4x-4A\sin 4x-16Ax\cos 4x+4B\cos 4x+4B\cos 4x$
$-16Bx\sin 4x$

(درصورت مسئله گذاشته

$\sin 4x \xrightarrow{\text{ضریب}} B+16(0)=\cos\alpha \qquad B=\cos\alpha$

$x\cos 4x \xrightarrow{\text{ضریب}} -16A+16(A)=0 \qquad 0=0\ \checkmark$

پس A دلخواه است

$\square$