

جزوه جبر خطی

Subject ... *سوال*

Date / /

فصل 1 (مقدّمات)

matrix *سطر*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M(R)_{3 \times 3}$$

ماتریس هایی که سه سطر و سه ستون دارند

با درایه های حقیقی (R)

$$B = \begin{bmatrix} -1+i & 2-\frac{1}{2}i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(C)_{2 \times 2}$$

ماتریس هایی که 2 سطر و 2 ستون با درایه های

C (مختلط)

Note: هر عدد مختلط $i = a + ib$ که a قسمت حقیقی و b قسمت موهومی است $(i^2 = -1)$

Note: n م مقدار سطر و ستون ماتریس برابر باشد ماتریس مربعی و آن را برابر با n ماتریس

$$C \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

مستطیل

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Note: (ماتریس همانی) n مربع باشد

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

ماتریس همانی روی قطر اصلی درایه های یک و بقیه صفر باشند

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$O =$
 2×2

Note: ماتریس مربعی یا مستطیل n همگی درایه های آن صفر باشند

$$A_{max} + B_{max}$$

جمع دو ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

در جمع درایه ها تغییر نمی پذیرد جمع می شوند

$$(A+B)_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 7 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

یا داکوری: A^t (در جای سطر و ستون عوض می شود)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

note: ماتریس متقارن ($A^t = A$) مربع و $A = A^t$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A = A^t$$

note: اگر ماتریس مربع داشته باشیم که در آن بهای غیر صفر اصلی صفر باشد، حتماً متقارن است.

note: (ماتریس متقارن) مربع $A^t = -A$

ماتریس متقارن $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^t \rightarrow A = -A^t$

note: ماتریس مربعی و در آن بهای روی قطر اصلی صفر و در آن بهای بالا و پایین

note: قرینه یک ماتریس $(-A)$: یک عدد ثابت در آن بهای ضرب می شود

عناصر قرینه

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

note: تفاضل ۲ ماتریس

$$(A - B) = A_{\text{مان}} + (-B)_{\text{مان}}$$

با فرست قرینه B را با ماتریس A جمع کرد.

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad A - B = ? \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

note: ضرب ماتریس ها

$$A_{m \times n} \times B_{n \times k} = (AB)_{m \times k}$$

در ضرب باید تعداد ستون A با تعداد سطر B برابر باشد

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Subject

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & -1 \\ -16 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3 \times -4) + (5 \times 0) & (-3 \times -1) + (5 \times 2) & (-3 \times 0) + (5 \times -1) \\ (4 \times -4) + (1 \times 0) & (4 \times -1) + (1 \times 2) & (4 \times 0) + (1 \times -1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 13 & -5 \\ -16 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{: } Fx$$

$$Q = A \cdot B \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \times 0) + (0 \times 2) & (2 \times 5) + (0 \times -1) & 0 \\ (3 \times 0) + (-1 \times 2) & (3 \times 5) + (-1 \times -1) & 0 \\ (1 \times 0) + (5 \times 2) & (1 \times 5) + (5 \times -1) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -2 & 16 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس:

برای معکوس ماتریس معکوس، کافی است بدانیم $\det A \neq 0$ است در این صورت A^{-1} موجود است.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$ad - bc$$

if $\det A \neq 0 \rightarrow A^{-1}$ exists

تویب: A^{-1} اگر ماتریس A و $\det A \neq 0$ است در این صورت A^{-1} موجود است.

بیشتر A^{-1} ماتریس است که از راست یا چپ ضرب می شود $I_{n \times n}$ (همان) شود

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

اعمال سطری مقدماتی:

عمل نوع 1: یک سطر (یا ستون) از ماتریس A را در $k \neq 0$ ضرب یا تقسیم کنیم.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 7 & 11 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 7 & 11 & -1 \end{bmatrix}$$

(سطر $\rightarrow$ row)

عمل نوع 2: $k \neq 0$ برابر یک سطر را به سطر دیگر اضافه کنیم. (خطی از زیر خط اول را منفی

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$-7r_1 + r_2 \rightarrow r_3$$

بیش (خزف)

برای یک کردن دوی پله دوم

کافی است

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{29}{3} & -18 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{29}{3} & -18 & 0 \end{array} \right]$$

$$r_2 \rightarrow r_2 - \frac{29}{3}r_1 \quad r_3 \rightarrow r_3 + 18r_1$$

Ex: A را با اعمال سطری مقدماتی تبدیل به ماتریس R کنید!

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 9 & 2 & 0 \\ 12 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 9 & 2 & 0 \\ 12 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_2$$

عمل نوع iii: جابه جایی 2 سطر از یک ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \\ 12 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{r_1}{4} \rightarrow r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Not: فرض کنید ماتریس A را داشته باشیم. و اعمال سطری مقدماتی را روی آن انجام دهیم

$A \rightarrow R$ در این صورت ماتریس R حاصل را ماتریس تحویل یافته سطری یکسانی گویند

Note: اگر ماتریس $A_{n \times n}$ را داشته باشیم و $\det A \neq 0$ آنگاه $[A_{n \times n} : I_{n \times n}]$ را ماتریس

افزوده گویند

$$Ex: A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -2 - 3 = -5 \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \frac{r_1}{4} \rightarrow r_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right]$$

$$-r_1 + r_2 \rightarrow r_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{r_2}{-1/4} \rightarrow r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -4 \end{array} \right]$$

Subject

Date / /

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array} \right]$$

note: برای صفر کردن زیر یکدیگر (یا بالای یکدیگر) باید همان ستون را در [آن عدد -] ضرب کرد و با آن سطر جمع کنیم

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] \textcircled{a}$$

$$-a r_1 + r_2 \rightarrow r_2$$

$$! A^{-1}, A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} : Ex$$

$$[A | I]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{r_2}{2} \rightarrow r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{r_3}{2} \rightarrow r_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \rightarrow -\frac{2}{3} r_2 + r_1 \rightarrow r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \rightarrow -\frac{1}{3} r_2 + r_1 \rightarrow r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$! A^{-1} A = I \text{ del } A^{-1} \text{ است} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} : Ex$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{r_1}{3} \rightarrow r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow -r_1 + r_3 \rightarrow r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \frac{2}{3} r_2 + r_1 \rightarrow r_1$$

Subject

Date: / /

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{5}{4} r_2 + r_3 \rightarrow r_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

در این مرحله بالای پله‌ی سوم را تبدیل کرد و دایره‌های بالای آن را صفر کردیم به طرز مشابه

ماتریس خودتوان: A^n مربع $(A_{n \times n})$ و $A^2 = A$ در این صورت است

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A^2 = A \rightarrow A^3 = A$$

پس توان‌های فرد $(A^k = A)$ پس برای A^k با A برابر است.

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A = A^2 = A \rightarrow A^4 = A$$

پس برای توان‌های زوج A^k با A^2 برابر است $(A^k = A)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \rightarrow \text{خودتوان است}$$

ماتریس‌های صفر مربع، خودتوان است

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{خودتوان}$$

 $I_{n \times n}$

ماتریس خودتوان همانی خودتوان است.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ آیا خودتوان است؟

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^2 = A$$

ماتریس پوچ توان 2 است $A^2 = A$ پس $A^k = A$ برای هر $k \geq 1$ زیرا $A^2 = A$ پس $A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot A = A^2 = A$ و به همین ترتیب $A^4 = A$ و ...
پس $A^k = A$ برای هر $k \geq 1$ زیرا $A^2 = A$ پس $A^3 = A$ و ...
ماتریس صفر

مقادیر $A \neq 0$ و $A^2 \neq 0$ و $A^3 = 0$ باشد، آنگاه $K=3$ یعنی مرتبه پوچ توانی ماتریس A ۳ است. K ماتریس صفر مربع، خود پوچ توان است و $K=1$ (مرتبه پوچ توانی آن یک است).

En: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ آیا پوچ توان است؟

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پوچ توان $A^3 = 0$ مرتبه پوچ توانی ۳ است.

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

note: (ماتریس مزدوج $\bar{A}$):

$$a+bi = a-bi \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i & -i \\ -4-5i & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مزدوج}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i & +i \\ -4+5i & 2 \end{bmatrix}$$

note: $A^H = (\bar{A})^t$

note: ماتریس هرمتی: $A^H = A$ و A مربع و $A^H = A$

note: ماتریس هرمتی چپ: $A^H = -A$ و A مربع و $A^H = -A$

En: $A = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{bmatrix}$ آیا هرمتی؟

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & +2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix} \quad (\bar{A})^t = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{bmatrix} = A$$

چون $A^H = A$ پس هرمتی است. $A^H = A$ کجای سطر و ستون عوض شود

note: (ماتریس نرفال) A مربع و در این شرط صدق کند $A^H A = A A^H$

En: $A = \begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 3i \end{bmatrix}$ آیا هرمتی چپ؟

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ -1+i & -3i \end{bmatrix}$$

هرمتی چپ $A^H = -A$

$$(\bar{A})^t = A^H = \begin{bmatrix} -i & -1+i \\ 1+i & -3i \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} -i & -1+i \\ 1+i & -3i \end{bmatrix}$$

$A^2 = A \times A$

En: کوچک ترین K که ماتریس زیر پوچ توان شود:

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مرتبه پوچ توانی ۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = AA^t = A^t A = I$$

ماتریس معکوس:

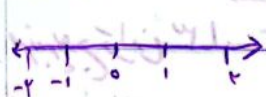
ماتریس معکوس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

فصل ۳

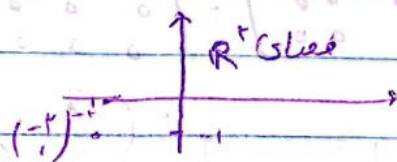
فضای برداری:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^3, y = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \in R^5$$

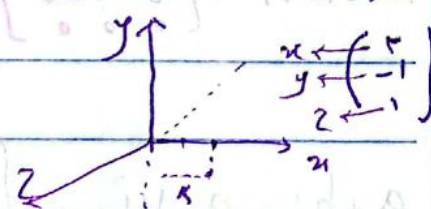
بردارها: ماتریس هاین تک مستقل هستند مانند



فضای اعداد حقیقی



فضای R^2



فضای برداری: V یک فضای برداری است به معنای آن که $\alpha \in V$ و $\beta \in V$ باشند، $c \in F$

$$c\alpha + \beta \in V$$

میدان است به معنای R یا C یا F باشد (آنها)

تدریس خطی

مانند فضای R^n

$$c = 9, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in R^2, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in R^2$$

$$cx + y = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 \\ 27+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 32 \end{pmatrix} \in R^2$$

پس R^2 فضای برداری است چون برای هر $x, y \in R^2$ دلخواه و $c \in F$ باشد، c باشد:

$$cx + y \in R^2$$

تدریس خطی: اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهای در فضای مورد نظر V باشند، $c_1, \dots, c_n$ هم اسکالرها

متعلق به میدان F باشند در صورتی که $c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$ را بنویسیم به عبارت دیگر بالا

تدریس خطی α ها میسیم

$$if c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$$

مستقل خطی:

then

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

باشد در این صورت α ها نیستند

مستقل خطی هستند

به نام آب از مجموعه های زیر روی میدان $\mathbb{Q}$ فضای بردار می باشد:

(الف) $\{A + b\sqrt{2} \mid A, b \in \mathbb{Q}\}$

(ب) $\mathbb{Q}$

(ج) $\{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

(د) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\}$

(ه) $\mathbb{Z}$

(الف) اگر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $x, y \in A$ باشد

$x \in A \rightarrow x_1 + x_2\sqrt{2} \in A$ و $y \in A \rightarrow y_1 + y_2\sqrt{2} \in A$

$\lambda x + y = \lambda(x_1 + x_2\sqrt{2}) + (y_1 + y_2\sqrt{2}) = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)\sqrt{2}$

مقدار $\lambda x + y$ در A است.

بنابراین A یک فضای بردار است.

$(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)\sqrt{2} \in A$

$(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)\sqrt{2} \in A$

بنابراین A یک فضای بردار است.

(ب) $\mathbb{Q}$ یک فضای بردار است. (چون $\mathbb{Q}$ یک میدان است و $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$)

بنابراین $\mathbb{Q}$ یک فضای بردار است.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

(ج) به مانند الف اما با $\sqrt{2}$ فقط

(د) $\mathbb{Z}$ فضای بردار نیست. $x = 2 \in \mathbb{Z}$ و $y = 1 \in \mathbb{Z}$

$x + y = 2 + 1 = 3 \notin \mathbb{Z}$

(ه) $\mathbb{Z}$ فضای جواب یک دستگاه معادلات خطی همگن به صورت مجموعه ای

$\{x \mid x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, Ax = 0\}$ که A ماتریس های $m \times n$ می باشد.

$Ax = 0$ و $Ay = 0$

$x, y \in W$

$\lambda x + y \in W \rightarrow A(\lambda x + y) = \lambda Ax + Ay = 0$

بنابراین $\lambda x + y \in W$ و $\mathbb{Z}$ یک فضای بردار است.

En: اندکترین $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ به صورت ترکیب خطی از ماتریس های

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نویسه شود عقدا، A

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_1 \\ c_1 & 2c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & 2c_2 \\ -c_2 & 3c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4c_3 \\ -c_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & c_1+2c_2+4c_3 \\ c_1-c_2-c_3 & 2c_1+3c_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1+c_2 & c_1+2c_2+4c_3 \\ c_1-c_2-c_3 & 2c_1+3c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=1 \\ c_1+c_2+4c_3=a \\ c_1-c_2-c_3=3 \\ 2c_1+3c_3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-21 \\ c_1=-2 \\ c_2=3 \\ c_3=-1 \end{cases}$$

بردارهای $a_1 = (0, 2, 0, 0, -1)$ و $a_2 = (1, 0, 0, 0, 0)$ و $a_3 = (0, 0, 0, 0, 0)$ و $a_4 = (0, 0, 0, 0, 0)$ و $a_5 = (0, 0, 0, 0, 0)$

از R^5 باشد. در این صورت از معادلات خطی که می بینیم می توانیم بگوییم که فضای جواب آن دقیقاً زیر فضای تولید شده توسط این بردارهاست (زیر فضای W که $W \subseteq V$ و W هر دو فضای برداری باشد) حذف

$$(x, y, z, w, v) = (x, y, z, w, v)$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

$$x = y = z = w = v = 0$$

Ex ۱: $T: R^2 \rightarrow R^3$ تبدیل خطی باشد $T(1, -1) = (1, 0, 0)$ و $T(2, 1) = (4, 1, 0)$ باشد. $T(0, 3)$ را بیابید.

(۳) را به صورت ترکیب خطی $(1, -1)$ و $(2, 1)$ بنویسیم

$$(0, 3) = c_1(1, -1) + c_2(2, 1) = (c_1 + 2c_2, -c_1 + c_2) = (c_1 + 2c_2, -c_1 + c_2)$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \rightarrow c_2 = 1 \quad c_1 = -2$$

$$(0, 3) = -2(1, -1) + (2, 1)$$

c_1 و c_2 را در (1) بگذاریم

T را در آن اثر داده

$$T(0, 3) = -2T(1, -1) + T(2, 1) = -2(1, 0, 0) + (4, 1, 0) = (-2, 0, 0) + (4, 1, 0) = (2, 1, 0)$$

$$\rightarrow T(0, 3) = (2, 1, 0) \quad \square$$

روش دوم: این هم فایده $T(x, y)$ را پیدا کنیم ابتدا (x, y) را به صورت ترکیب خطی

$$(x, y) = c_1(1, -1) + c_2(2, 1) \quad (۲) \text{ بنویسیم}$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = x \\ -c_1 + c_2 = y \end{cases} \rightarrow c_2 = \frac{x+y}{3} \quad c_1 = x - 2c_2 = x - 2\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{x-2y}{3}$$

$$(x, y) = \left(\frac{x-2y}{3}\right)(1, -1) + \left(\frac{x+y}{3}\right)(2, 1)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{x-2y}{3}\right)T(1, -1) + \left(\frac{x+y}{3}\right)T(2, 1)$$

اکنون T را اثر داده

$$T\left(\frac{x-2y}{3}\right)T(1, -1) + T\left(\frac{x+y}{3}\right)T(2, 1) = \left(\frac{x-2y}{3}\right)(1, 0, 0) + \left(\frac{x+y}{3}\right)(4, 1, 0)$$

$$= \left(\frac{x-2y}{3} - \frac{x+y}{3}\right) + \left(\frac{x-2y}{3} + 4\frac{x+y}{3}\right)$$

درجه قبل $T(x, y)$ به دست می آید

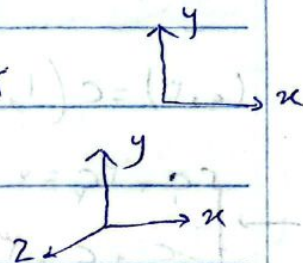
اکنون اگر $x = 0$ و $y = 3$ بگذاریم $T(0, 3)$ به دست می آید

✓ هر فضای (space) شامل یک مقدار پایه است که آن فضای را تولید می‌کند.
 مانند: فضا تا قدر که ۴ ستون اصلی آن را تولید کرده باشد.

$$\xrightarrow{x} \dim(R) = 1 \rightarrow R(1)$$

$$R^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow \dim R^2 = 2$$

$$R^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow \dim R^3 = 3$$



$$\dim R^n = n$$

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

چند جمله ای حداکثر درجه ۱

$$P_1(x) = \langle 1, x \rangle \rightarrow \dim(P_1(x)) = 2$$

$$P_2(x) = \langle 1, x, x^2 \rangle \rightarrow \dim(P_2(x)) = 3$$

$$P_n(x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle \rightarrow \dim(P_n(x)) = n+1$$

$$\ker T = \left[\begin{array}{l} \text{ت روی آن عناصر اثر نمی‌کنند} \\ \text{و صفر می‌شود} \end{array} \right] \text{ عناصری از دامنه}$$

$$\ker T = \{ \alpha \in V \mid T(\alpha) = 0 \}$$

این $T: V \rightarrow W$ آینه

$\text{rank } T = (\text{rank } T)$ رتبه T بعد فضای بردار رتبه T عناصرند

$$\text{rank } T = \dim(\text{Im } T) \rightarrow \text{تصویر } T$$

✓ $E \times 2$: اگر V فضای توابع چند جمله ای روی میدان F باشد و T تبدیل انتگرال گیری روی V باشد. در این صورت $\dim \ker T = ?$ $\dim \text{Im } T = ?$

✓ $E \times 3$: اگر V فضای توابع چند جمله ای روی میدان F باشد و D تبدیل مشتق گیری روی V باشد $\dim \ker D = ?$ $\text{rank } D = ?$

حل ۲: چهل درج چند جمله ای را قیسه کرده می‌توان درج n گرفت.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$T(P_n(x)) = \int P_n(x) dx = \int (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) dx$$

$$= a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{Ker } T = \left\{ \begin{array}{l} \text{عنصری از دامنه} \\ \text{اینها چندضابطه ای درجه } n \end{array} \mid T(P_n(x)) = 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{array} \right.$$

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0 \rightarrow$$

$$\text{Ker } T = \{0\} \quad \text{چون } P_n(x) = 0$$

$$\dim \text{Ker } T = 0$$

$$\dim \text{Ker } T + \dim (\text{Im } T) = \dim (\text{دامنه})$$

$$\dim(P_n(x)) = n+1$$

$$\dim(\text{Im } T) = n+1 \quad \Delta$$

Ex3: اگر V فضای چندضابطه‌ای روی میدان F باشد D تبدیل مشتق سری روی V باشد

$$\text{rank } D = n \quad \dim \text{Ker } D = 1$$

حل: میدان $P_n(x)$ را از رده مرتبه n در نظر بگیریم

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$D(P_n(x)) = D(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$\text{Ker } D = \left\{ \begin{array}{l} \text{عنصری از دامنه} \\ \text{اینها چندضابطه‌ای درجه } n \end{array} \mid D(P_n(x)) = 0 \right\}$$

$$a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Ker } D = \{a_0\} \rightarrow \dim \text{Ker } D = 1$$

$$\dim \text{Ker } D + \dim (\text{Im } D) = \dim (\text{دامنه})$$

$$\dim(P_n(x)) = n+1$$

$$\rightarrow \dim(\text{Im } D) \rightarrow \infty \quad \Delta$$

note: (پایه فضا های ماتریس 2×2) این ماتریسهای عناصر پایه های 2×2 هست

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim (2 \times 2 \text{ های ماتریس}) = 2^2 = 4$$

$$\dim (3 \times 3 \text{ های ماتریس}) = 3^2 = 9$$

$$\dim (n \times n \text{ های ماتریس}) = n^2$$

$$\dim (m \times n \text{ های ماتریس}) = m \times n$$

note: عناصر پایه یک فضا اول باید نسبت به هم مستقل باشند و اینها آن فضا را بتوانند تولید کنند Space.

$$T(n, y, z) = (x, x+y, y+z) \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{Ex:}$$

$$\dim \text{Im } T = 2 \quad \dim \text{Ker } T = 1$$

$$\text{Ker } T = \{ (n, y, z) \mid T(n, y, z) = (0, 0, 0) \} \quad (x, x+y, y+z) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \rightarrow y = 0 \\ y+z = 0 \rightarrow z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } T = \{ (0, 0, 0) \}$$

$$\dim \text{Ker } T = 0$$

$$\dim \text{Ker } T + \dim (\text{Im } T) = \dim (\text{دامنه}) \rightarrow \dim (\mathbb{R}^3) = 3$$

$$\dim (\text{Im } T) = 3 \quad \square$$

تعریف (ترکیب خطی): اگر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ عناصر از یک فضا V باشند و $c_1, c_2, \dots, c_n$ اسکالر های در میدان F (یا $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشند در این صورت $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$ ترکیب خطی α ها نامیده می شود.

مستقل خطی: اگر ترکیب خطی α ها عنصر باشند و بتوان فقط به روش $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ در این صورت α ها نسبت به هم مستقلند.

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0 \quad \text{اگر } c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \quad \text{پس}$$

تعریف: اگر α ها مستقل خطی نباشند وابسته خطی اند.

تعریف: عناصر پایه یک فضا نسبت به هم مستقل خطی اند و آن فضا را تولید span می‌کنند

تعریف مختصات:

اگر β عنصری در فضای V با پایه‌های $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ باشد و β را بصورت ترکیب خطی α ها بتوان بنویسیم

$$\beta = c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n$$

در این صورت $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ را بردار مختصات β در فضای V می‌گویند

E^3 در فضای R^3 عناصر پایه $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ هستند هر عنصر دیگر مانند $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

در این فضا را می‌توان بصورت ترکیب خطی عناصر پایه R^3 نوشت

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

پس مختصات $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ در فضای R^3 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ است.

نکته: در عدد ماتریسهای $m \times n$ برای پیدا کردن فضای پوچ و رتبه ماتریس، ابتدا با اعمال

سطری حذف می‌کنیم، ماتریس را تحول یافته می‌کنیم. در این صورت تعداد سطرها

صفر ماتریس‌های، بعد پوچ (پوچ ماتریس) $\dim$ و تعداد سطرها را صفر ماتریس

خواب، رتبه ماتریس را ایجاد می‌کند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : E^5$$

$$\begin{cases} R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-R_2 + R_3 \rightarrow R_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_3 + R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

صفری نیست

$\dim(A) = 3$ (ماتریس A) رتبه

تعداد سطرهای صفر

$\dim = 1$ (پوچ ماتریس)

Ex: مختصات بردار $f = 1 - t + t^2$ نسبت به پایه $\{1, 1+t, 1+t^2\}$

$$1 - t + t^2 = c_1(1) + c_2(1+t) + c_3(1+t^2)$$

معادلات $1 = c_1 + c_2 + c_3$

ضرب t $-1 = c_2$

ضرب t^2 $1 = c_3 \Rightarrow c_1 = 1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Ex: مختصات $f = 1 + 2t - t^3$ نسبت به پایه $\{1, t, t^2, t^3\}$

$$1 + 2t - t^3 = c_1(1) + c_2(t) + c_3(t^2) + c_4(t^3)$$

معادلات $1 = c_1 + c_3$

ضرب t $2 = c_2$

ضرب t^2 $0 = c_3$

ضرب t^3 $-1 = c_4 \rightarrow c_1 = 2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$

$1 = c_1 - 2 \rightarrow c_1 = 3$

تعیین: $T: P_3(R) \rightarrow P_3(R)$ یک تغییر خطی باشد.

$T(f) = 2f'(x) + \int_0^x 3f(t)dt$

$\dim \ker T$ در این صورت $\text{rank } T$

حل: ابتدا یک چندجمله‌ای درجه ۲ در فرضیه فته $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$f' = a_1 + 2a_2x \rightarrow T(f) = 2f' + \int_0^x 3f(t)dt$

$= 2(a_1 + 2a_2x) + 3 \int_0^x (a_0 + a_1t + a_2t^2)dt$

if $T(f) = 0$

$\rightarrow 2a_1 + 4a_2x + 3a_0x + \frac{3}{2}a_1x^2 + a_2x^3 = 0$

معادلات $2a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0$

ضرب x $4a_2 + 3a_0 = 0$

$$\frac{a}{p} = 0 \rightarrow a = 0$$

چون به معادله دو مجهول داریم پس به تغییر آزاد $Free$ هست

$$\dim \ker T = 1 \quad \dim(\ker T) + \text{rank } T = \dim(\text{دامنه}) = \dim(\text{چند جمله ای حد اکثر درجه 2}) = 3$$

$$\rightarrow \text{rank } T = 2 \quad \Delta$$

note: $\text{trace}(A)$ اثر ماتریس، (ردیال)

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix}$$

$$\text{trace}(A) = a + b$$

مجموع عناصر روی قطر اصلی (ماتریس مربعی) برابر اثر آن ماتریس است.

note: eigh value : مقدار ویژه λ

ماتریس همانی

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

پس ریشه های معادله مشخصه بالا مقادیر ویژه A است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Ex: مقادیر ویژه}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 0 = 0$$

$\downarrow \lambda = 3$ $\downarrow \lambda = 4$

note: اگر A باشد $n \times n$ ماتریس n مقدار ویژه حقیقی دارد. [در صورتی که برخی ریشه ها حقیقی نباشند عدد مختلط هستند]

$$\text{trace}(A) = \sum \lambda_i$$

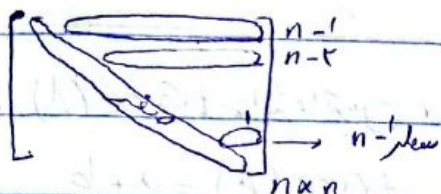
note: اثر ماتریس A برابر مجموع مقادیر ویژه A

Ex: $T: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$ (matrix) $T(A) = A + A^t$ (فای n×n) $\rightarrow$ (فای n×n) $\rightarrow$ (فای n×n)

$\dim \text{Im } T$ و $\dim \text{Ker } T$ در این صورت $T(A) = A + A^t$

$$\text{Ker } T = \left\{ \begin{array}{l} \text{عناصری از راجعه در اینجه} \\ \text{فای n×n مربعی} \end{array} \middle| \begin{array}{l} T(A) = 0 \\ \rightarrow A + A^t = 0 \\ A = -A^t \end{array} \right\}$$

یا دقت کردن



که تعداد (n-1) است.

$$\dim \text{Ker } T = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \text{تعداد حساب}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (\text{حجم آخر} + \text{حجم اول}) \quad \text{نقشه دایره}$$

$$\dim \text{Ker } T + \dim(\text{Im } T) = \dim(M_n(R)) = n^2$$

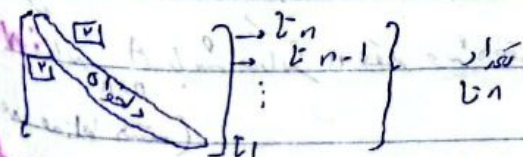
$$\rightarrow \frac{n(n-1)}{2} + \dim(\text{Im } T) = n^2$$

$$\dim(\text{Im } T) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^2 - n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \square$$

$$T(A) = A - A^t$$

$$\text{Ker } T = \left\{ \begin{array}{l} \text{عناصری از راجعه} \\ \text{فای n×n مربعی} \end{array} \middle| \begin{array}{l} T(A) = 0 \\ A - A^t = 0 \\ A = A^t \end{array} \right\}$$

در این صورت



$$\dim \text{Ker } T = n + (n+1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{نقشه دایره}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{حجم آخر} + \text{حجم اول}) \quad \text{تعداد حساب}$$

$$\dim(\text{Im } T) = \dim(M_n(R)) - \dim(\text{Ker } T) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \square$$

Ex1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $T: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$ تبدیل خطی باشد، $T(B) = BA - AB$ را بیابید.

Ex2: $T: R^3 \rightarrow R^3$ $T(x, y, z) = (x+y, y-x, x+z)$ است. T نسبت به پایه $\alpha = \left\{ \alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1) \right\}$ را بیابید.

Ex3: T فضای مرتب‌شده R^3 را به فضای مرتب‌شده R^3 نگاشت خطی باشد. T نسبت به پایه $\alpha = \left\{ \alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 1) \right\}$ را بیابید.

حل 1: $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را خواسته شده متغیر به دانه

$T(B) = BA - AB$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (a-d) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون 2 ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ نسبت به هم متغیر هستند پس یک پایه برای $\text{Im } T$ هست $\dim(\text{Im } T) = 2$

حل 2 ابتدا $T(\alpha_i)$ را نسبت به α می‌نویسیم $T(\alpha_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$
 $T(\alpha_2) = T(0, 1, 0) = (1, 1, 0)$
 $T(\alpha_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$

بنابراین $T(\alpha_1) = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$
 $T(\alpha_2) = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$
 $T(\alpha_3) = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T(\alpha_1)$ را به دست آوریم.

$$T(\alpha_1) = T(1, 0, 2) = (1, -1, 1)$$

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = c_1 (1, 0, 1) + c_2 (1, 0, 2) + c_3 (1, 1, 0)$$

$$= (\underline{c_1 + c_2 + c_3}, \underline{c_3}, \underline{c_1 + 2c_2}) \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

 $T(\alpha_2)$ به دست آوریم.

$$T(\alpha_2) = T(0, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 = c_1 (1, 0, 1) + c_2 (1, 0, 2) + c_3 (1, 1, 0)$$

$$= (\underline{c_1 + c_2 + c_3}, \underline{c_3}, \underline{c_1 + 2c_2}) \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow c_2 = 2 \quad c_1 = -3 \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{جواب} \\ \text{خاتمه} \end{matrix} \quad \square$$

حاصل می شود

$$D(F, 1) = D(1) = 0$$

حل 3

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = c_1 (1) + c_2 (x) + c_3 (x^2) + c_4 (x^3)$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(F, x) = D(x) = 1$$

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = c_1 (1) + c_2 (x) + c_3 (x^2) + c_4 (x^3)$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0 \quad c_4 = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(F, x^2) = D(x^2) = 2x$$

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = c_1 (1) + c_2 (x) + c_3 (x^2) + c_4 (x^3)$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 0 \quad c_4 = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(F, x^3) = D(x^3) = 3x^2$$

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 \rightarrow c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) + c_4(x^3)$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 1 \quad c_3 = 3 \quad c_4 = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{trace } A = 0$$

: note

$$\ker T = \{x \in V \mid T(x) = 0\}, T: V \rightarrow W$$

$$i) \text{ if } \ker T = \{0\} \rightarrow \text{آنیجیب}$$

$$\dim \ker T + \dim (\text{Im } T) = \dim (\text{دامنه})$$

$$ii) \text{ if } \dim (\text{Im } T) = \dim (W) \rightarrow T \text{ یوساست}$$

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Ex}$$

$$T(x, y, z) = (x+y, y+2, x+2y+2z)$$

$$\ker T = \{(x, y, z) \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \mid (x+y, y+2, x+2y+2z) = (0, 0, 0)\}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \rightarrow x=-y \\ y+2=0 \rightarrow z=-y \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y+2=0 \rightarrow z=-y$$

$$x+2y+2z=0 \rightarrow -y+2y-2y=0 \rightarrow y=0$$

$$x=0 \rightarrow z=0$$

$$\rightarrow \ker T = \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \text{آنیجیب است}$$

$$\dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T) = \dim(\text{دامنه}) = 3$$

$$\rightarrow \dim(\text{Im } T) = 3$$

$$\dim(W) = 3 \rightarrow \dim(\text{Im } T) = 3 \rightarrow \text{یوساست}$$

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ Ex}$$

$$T^{-1}(1, 1)$$

$$\begin{cases} x+y=1 \rightarrow y=1-x \\ 2x-2=1 \end{cases}$$

$$2x-2=1 \rightarrow 2=2x-1$$

$$T^{-1}(1, 1) = \{(x, 1-x, 2x-1)\}$$

آزاد

حل به روش دوم:

ابتدا $[T]_{B_1}^{B_2}$ را محاسبه کرده (در ماتریس 2×3 است)

$$Q_{3 \times 3} \begin{pmatrix} [T]_{B_1}^{B_2} \\ P^{-1} \end{pmatrix}$$

P ماتریس است که عناصر پایه جدید بر روی صورت ترکیب خطی عناصر قدیم بردنویسه و Q ماتریس است که عناصر جدید را در فرم صورت ترکیب خطی قدیم را می‌نویسد.

$$\text{محاسبه ماتریس } P: \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = 1, c_2 = 1 \rightarrow c_1(1,0) + c_2(0,1) = (1,1) \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = 2, c_2 = 3 \rightarrow c_1(1,0) + c_2(0,1) = (2,3)$$

$$\rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{نکته } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

محاسبه ماتریس Q

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 1 \rightarrow c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (1,1,1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 1 \rightarrow c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (1,1,1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow c_1 = c_2 = 0, c_3 = 1 \rightarrow c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(1,0,0) \xrightarrow{(1,0,0)} (1,0) = c_1(1,0) + c_2(0,1) \rightarrow c_1 = 1, c_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(0,1,0) = (0,1) = c_1(1,0) + c_2(0,1) \rightarrow c_1 = 0, c_2 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(0,0,1) = (0,0) = c_1(1,0) + c_2(0,1) \rightarrow c_1 = c_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \square$$

$$B_1 = \{(1,0), (0,1)\} \quad T(1,0) = (1,0) \quad T: R^2 \rightarrow R^2 \quad Ex: \quad T: R^2 \rightarrow R^2$$

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \{(1,1), (1,2)\}$$

روشن اول:

$$[T]_B^{B'} = P^{-1} [T]_{B_1}^{B_1} P \quad \textcircled{1}$$

که P ماتریس 2×2 است به افراز است پایه جدید را به صورت ترتیب خطی پایه قدیم بنویسیم
محاسبه ماتریس P :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases} \rightarrow (c_1, c_2) = (1, -1) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (1, -1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \rightarrow (c_1, c_2) = (1, 2) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (1, 2)$$

$$\rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det = 2 + 1 = 3 \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

محاسبه $[T]_{B_1}^{B_1}$ ↓
مبنی T را به وی مختصر B_1 اندازده پس به صورت ترتیب خطی

عناصر B_1 بنویسیم. $T(1, 0) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (c_1, c_2) = (1, 0)$

$$(c_1, c_2) \rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow (c_1, c_2) = (1, 0) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (1, 0)$$

$$[T]_{B_1}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

روشن دوم: خطی از یک پایه

$$(1, 0)$$

محاسبه $[T]_{B'}^{B'}$ (ست چپ تساوی ①)

$$T(1, -1) = (-1, 0) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (c_1, c_2) = (-1, 0)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{3} \\ c_1 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$T(1, 2) = (2, 0) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (c_1, c_2) = (2, 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} \\ c_1 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$[T]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \square$$

نکته: فرض کنید T در W دو فضای برداری با بعد متناهی باشد، $\dim V = \dim W$ و $T: V \rightarrow W$ تبدیل خطی باشد. آنگاه که زمره های زیر معادل اند.

(1) T معکوس پذیر
(2) T یک به یک است

(3) T پوشا
(4) T $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مجموعه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی در V باشد

آنگاه $[T\alpha_1, \dots, T\alpha_n]$ مجموعه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی در W است.

(5) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ فضای V را تولید کند. آنگاه $[T\alpha_1, \dots, T\alpha_n]$ فضای W را تولید کند.

(6) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ پایه ای برای V باشد. آنگاه $[T\alpha_1, \dots, T\alpha_n]$ پایه ای برای W است.

(7) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مجموعه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی در W باشد. آنگاه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مجموعه

مستقل خطی در V است.

(8) $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ پایه ای برای W باشد. آنگاه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ پایه ای برای V است.

تعریف:

فضای دوگان (V^*)

تغییر هر فضای برداری V یک فضای دگر به نام فضای دوگان V^* داریم:

فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ فضای V را تولید کند یا پایه ای برای فضای V باشد.

در اینصورت $[f_1, \dots, f_n]$ را پایه فضای دوگان V^* می نامیم به شرطی که:

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{و} \quad f_i(\alpha_1) = \delta_{i1} = 1$$

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$$

f^x : اگر V فضای برداری همه متابع چند جمله ای روی R (حداکثر درجه یک) باشد.

$$B^* = [f_1, f_2] \quad \text{و} \quad f_i(P(x)) = \int_0^1 P(x) dx \quad \text{و} \quad f_j(P(x)) = \int_0^1 P(x) dx$$

دوگان B باشد. آنگاه P_1 و P_2 ؟

$$P_1 = a_1 x + b_1 \quad \text{و} \quad P_2 = a_2 x + b_2$$

$$f_i(P_j) = \delta_{ij} = 1$$

$$\int_0^1 a_1 x + b_1 dx = a_1 \frac{x^2}{2} + b_1 x \Big|_0^1 = \frac{a_1}{2} + b_1 = 1$$

$$f_1(p_r) = \delta_{1r} = 0$$

$$\int_0^1 a_r x + b_r dx = \frac{a_r}{2} + \frac{b_r}{2} = 0$$

$$f_1(p_r) = \delta_{r1} = 0 \rightarrow \int_0^1 a_r x + b_r dx = a_r \frac{x^2}{2} + b_r x \Big|_0^1 = \frac{a_r}{2} + \frac{b_r}{2} = 0$$

$$f_r(p_r) = \delta_{rr} = 1$$

$$\int_0^1 a_r x + b_r dx = a_r \frac{x^2}{2} + b_r x \Big|_0^1 = \frac{a_r}{2} + \frac{b_r}{2} = 1$$

از معادلات به دست آمده (۴ معادله در ۴ مجهول داریم)

$$\begin{cases} \frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2} = 1 \\ \frac{a_r}{2} + \frac{b_r}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2} = 1 \\ \frac{a_r}{2} + \frac{b_r}{2} = 0 \end{cases}$$

جواب:

نیز می بینیم $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ پایه ای برای R^3 باشد که $\alpha_1 = (1, 0, 0)$ و $\alpha_2 = (0, 1, 0)$ و $\alpha_3 = (0, 0, 1)$ در این صورت پایه دوگانه $B^* = [f_1, f_2, f_3]$

$$f_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$

$$f_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$

$$f_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

$$f_1(\alpha_1) = \delta_{11} = a_1 = 1$$

$$f_1(\alpha_2) = \delta_{12} = a_2 = 0$$

$$f_1(\alpha_3) = \delta_{13} = a_3 = 0$$

پس $a_1 = 1$ و $b_1 = 0$ و $c_1 = 0$

$$f_2(\alpha_1) = \delta_{21} = a_2 = 0$$

$$f_2(\alpha_2) = \delta_{22} = a_2 + b_2 = 1$$

$$f_2(\alpha_3) = \delta_{23} = a_2 + b_3 = 0$$

پس $a_2 = 0$ و $b_2 = 1$ و $c_2 = 0$

$$f_3(\alpha_1) = \delta_{31} = a_3 = 0$$

$$f_3(\alpha_2) = \delta_{32} = a_3 + b_3 + c_3 = 0$$

$$f_3(\alpha_3) = \delta_{33} = a_3 + b_3 + c_3 = 1$$

پس $a_3 = 0$ و $b_3 = 0$ و $c_3 = 1$

Ex 1: $T: P_2(R) \rightarrow P_2(R)$ یک تبدیل خطی با $T(x) = x^2 + x'$ در این صورت

hint $T^{-1}(x^3) = ?$ $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ داده شده بر قسمه شود

Ex 2: $T(x, y, z) = (2x - y, 3x + 4y, 3x + y + 2z)$ $T: R^3 \rightarrow R^3$ در این صورت

$\text{Ker } T = \{ (x, y, z) \mid T(x, y, z) = (0, 0, 0) \}$ $\text{Trace}(T) = ?$

حل 1: چون دافنه مجموعه توانی چندضلعی ای داده شده درجه 3 است $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

$T(f) = 0x^3 \rightarrow T^{-1}(x^3) = ?$

$f' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$

$T(f) = xf + f' = x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2) = x^3$

ضرایب: $a_0 = 0$

ضرایب: $a_0 + 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = -2$

ضرایب: $a_1 + 3a_3 = 0 \rightarrow a_1 = 0$

ضرایب: $a_3 = 1$

ضرایب: $a_4 = 0$

$\rightarrow f = -2 + x^2 \rightarrow T(f) = x^3 \rightarrow T^{-1}(x^3) = f = -2 + x^2 \triangle$

ماتریس استاندارد $\begin{bmatrix} x & y & z \\ (1, 0, 0) & (0, 1, 0) & (0, 0, 1) \end{bmatrix}$

$T(1, 0, 0) = (2, 3, 3) = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1)$

$c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 3$

$T(0, 1, 0) = (-1, 4, 1) = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1)$

$c_1 = -1, c_2 = 4, c_3 = 1$

$T(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1)$

$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \text{Trace} = 2 + 4 + 1 = 7$

تعریف: (پوچساز)

$$W^0 = \{ f \in V^* \mid f(\alpha) = 0 \text{ و } \forall \alpha \in S, \alpha \in V \}$$

عناصر از فضای دوگان

Ex: اگر $M_p(R)$ فضای برداری ماتریس های 2×2 روی اعداد حقیقی باشد $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$f: M_p(R) \rightarrow R$ و $W = \{ A \in M_p(R) \mid AB = 0 \}$

برداري و قسمت برد R باشد که $f(W) = 0$ اگر $f(I) = 1$ آنگاه $f(B) = ?$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

حل:

$$AB = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & -2a+b \\ c-d & -c+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a-b=0 \rightarrow 2a=b \\ -2a+b=0 \rightarrow 2a=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2c-d=0 \rightarrow 2c=d \\ -2c+d=0 \end{cases}$$

$$2c-d=0 \rightarrow 2c=d \quad -2c+d=0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

پس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ یک پایه برای پوچساز سوال است و چون پایه $M_p(R)$ است

$$\dim(M_p(R)) = 4$$

کافی است $(4-2=2)$ و ۲ ماتریس دیگر نسبت به ۲ تای بالا مستقل خطی باشند

$$\text{یک پایه برای } M_p(R) \text{ به دست می آید } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

آنون B را بصورت ترکیب خطی عناصر این ۴ تا (پایه برای $M_p(R)$) نوشته

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1+c_3 & 2c_1+c_4 \\ c_2+c_4 & c_2+2c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1+c_3=2 \rightarrow c_1=3 \\ 2c_3=-2 \rightarrow c_3=-1 \\ c_4=-1 \end{cases}$$

$$c_2+2c_3=1 \rightarrow c_2=1-2c_3=3$$

پس رابطه ۱ اثر دارد

$$f(B) = 3f \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3f \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - f \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - f \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$3f(I) = 3 \times 1$$

Ex: $B = \{(a, b), (c, d)\}$ یک پایه برای R^2 باشد و $B^* = \{x+y, x-y\}$ یک پایه دوگانه B باشد آنگاه B و B^*

حل: $B^* = \{f_1, f_2\}$ ، $B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$
 $f_1 = x+y$
 $f_2 = x-y$
 $\beta_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$

$f_1(\alpha_1) = \delta_{11} = 1 \rightarrow a+b=1 \checkmark$

$f_1(\alpha_2) = \delta_{12} = 0 \rightarrow c+d=0 \times$

$f_2(\alpha_1) = \delta_{21} = 0 \rightarrow a-b=0 \checkmark$

$f_2(\alpha_2) = \delta_{22} = 1 \rightarrow c-d=1 \times$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \rightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} c+d=0 \rightarrow c=-d \\ c-d=1 \end{cases} \rightarrow d=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{2}$$

فصل ۱۰ [دترمینان]

ماتریسهای مربعی A دارای دترمینان $\det(A)$ میباشند. $\det(A)$ یک اسکالر حقیقی است.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = 3(0) - (0)(-1) = 0$
 $15 \neq 0$

note: اگر ماتریس دارای $\det A \neq 0$ باشد معکوس یکتا است (ناصفرد) و A^{-1} برحسب آن

محاسبه می شود. $\det A = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 3(0+4) + 0 = 12 \neq 0$
 $\det A: Ex$
 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 $\det A = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(0+4) + 0 - 1(-2-0) = 12+2=14 \neq 0$

اگر $\det A = 0$ ماتریس A یک سطر و یک ستون صفر باشد $\det A = 0$

2- اگر یک سطر (ستون) از ماتریس $A_{n \times n}$ را در $\lambda \neq 0$ ضرب کنیم در این صورت

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

3- اگر همه سطرها (ستونها) را در $\lambda \neq 0$ ضرب کنیم

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

محاسبه A^{-1} (مقلوب) برای ماتریس $A_{n \times n}$

$$\text{if } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det A \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

برای ماتریس A و بالابنده

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t$$

مقادیر

که محاسبه می شود صورت زیر اند

$$a_{ij} = (-1)^{i+j}$$

در تعیینان ماتریس که سطر i ام و ستون j ام حذف شده باشد

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ex در تعیینان ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3(0 - 12) - 1(-8 - 4) + 2(-6 - 0) = 3(-12) - 1(-12) + 2(-6) = -36 + 12 - 12 = -36$$

$$-36 + 12 - 12 = -36$$

Ex اگر ماتریس B از اضافه کردن λ به یک سطر به سطر دیگر A به دست می آید

$$\det B = \det A$$

$$\text{adj}(A^t) = (\text{adj } A)^t$$

$$\text{adj}(\text{adj } A) = (\det A)^{n-2} A$$

ماتریس

ماتریس

$$\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$$

4. اگر A و B متناسب و وارون پذیر باشند $(B = P^{-1}AP)$ در اینصورت $\text{adj } A$ و $\text{adj } B$ متناسب اند

5. اگر A ماتریس معکوس پذیر باشد $\text{adj } A$ نیز معکوس پذیر است

6. اگر A معکوس پذیر باشد $\text{adj } A$ نیز معکوس پذیر است

7. اگر A معکوس پذیر باشد $\text{adj } A$ نیز معکوس پذیر است

$$\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{adj } A \quad .8$$

$$\text{adj}(A^k) = (\text{adj } A)^k \quad .8$$

10. اگر ماتریس B از تقویم A باشد $\text{adj } A$ نیز متناسب است $\det B = -\det A$

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \quad .11$$

$$\text{trace}(A) = \sum \lambda_i \quad .12$$

13. اگر A ماتریس معکوس پذیر باشد $\det A \neq 0$ باشد $\det A = 0$ باشد $\det A = 0$ باشد

14. اگر λ مقدار ویژه ماتریس A باشد $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد λ ریشه معادله مشخصه

$$Ax = \lambda x \quad .14$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad .14$$

$$= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & \omega-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (3-\lambda)(\omega-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = \omega \end{cases}$$

$$\text{if } \lambda = 3 \rightarrow Ax = \lambda x = 3x \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3x_1 \rightarrow x_2 = 0 \\ \omega x_2 = 3x_2 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{where } x_1 = 1$$

if $\lambda = 0 \rightarrow Ax = \lambda x = 0x$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

($x_2 = 0$) $\rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(b_i \neq 0)$

$A = \begin{bmatrix} 1+b_1 & 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1+b_r & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1+b_n \end{bmatrix}_{n \times n}$

$\det A = ?$

از سطر اول (از b_1) سطر دوم b_1 ... سطر n از b_n فاکتور میگیریم:

$(b_1 \dots b_n)$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_1} & \dots & \frac{1}{b_1} \\ \frac{1}{b_r} & 1 + \frac{1}{b_r} & \dots & \frac{1}{b_r} \\ \frac{1}{b_n} & \frac{1}{b_n} & \dots & 1 + \frac{1}{b_n} \end{bmatrix}$$

سطر ۲ تا n را با سطر اول جمع کنیم و در سطر اول بزنیم

$(b_1 \dots b_n) \times$

$$\begin{bmatrix} (1 + \sum \frac{1}{b_i}) & (1 + \sum \frac{1}{b_i}) & \dots & (1 + \sum \frac{1}{b_i}) \\ \frac{1}{b_r} & 1 + \frac{1}{b_r} & \dots & \frac{1}{b_r} \\ \frac{1}{b_n} & \frac{1}{b_n} & \dots & 1 + \frac{1}{b_n} \end{bmatrix}$$

از $(1 + \sum \frac{1}{b_i})$ فاکتور میگیریم

$$(b_1 \dots b_n) (1 + \sum \frac{1}{b_i}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{b_r} & 1 + \frac{1}{b_r} & \dots & \frac{1}{b_r} \\ \frac{1}{b_n} & \frac{1}{b_n} & \dots & 1 + \frac{1}{b_n} \end{bmatrix}$$

ستون اول را از ستون دوم تا n کم می‌کنیم

$$(b_1 \dots b_n) (1 + \sum \frac{1}{b_i}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{b_r} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{b_n} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس بالا، پایین مثلثی با درجه های روی قطر اصلی یکسان باشد پس

$\det A = (b_1 \dots b_n) (1 + \sum \frac{1}{b_i})$

دقیقاً؟

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} E-x \\ x_{n-1} \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

حالا سطر اول را از ۲ تا n ام حذف کنیم

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & (x_2 - x_1) & (x_2^2 - x_1^2) & \dots & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ 0 & (x_3 - x_1) & (x_3^2 - x_1^2) & \dots & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_n - x_1) & (x_n^2 - x_1^2) & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{bmatrix}$$

از سطر ۲ تا n ام، فاکتور بگیریم (از سطر ۳)

از $(x_2 - x_1)$... $(x_n - x_1)$ سطر n ام از $(x_n - x_1)$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) x$$

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a^{n-1} - b^{n-1}) = (a - b)(a^{n-2} + a^{n-3}b + \dots + b^{n-2})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & (x_2 + x_1) & \dots & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ 0 & 1 & (x_3 + x_1) & \dots & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & (x_n + x_1) & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{bmatrix}$$

از سطر ۲ تا n ام، ۲ تا n ام حذف کنیم

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & (x_2 + x_1) & \dots & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1) & \dots & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & (x_n + x_1) & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{bmatrix}$$

از سطر ۳ تا n ام، از سطر ۲ تا n ام از $(x_2 - x_1)$

از سطر n ام از $(x_n - x_1)$ فاکتور بگیریم

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & (x_2 + x_1) & \dots & (x_2^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ 0 & 0 & 1 & \dots & (x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (x_n^{n-1} - x_1^{n-1}) \end{bmatrix}$$

از سطر ۳ تا n ام، از سطر ۲ تا n ام حذف کنیم

$$n + (2n_p - 1) = 2 \rightarrow 3n_p = 3 \rightarrow n_p = 1 \quad n_p = 1$$

$$(det \neq 0) A^{-1} = \frac{1}{det A} (adj A)^t$$

نیم ماتریس معکوس، در آیه های آن (در مینان) ماتریس معکوس نام و ستون نام آن حذف شده
در صورتی که ماتریس معکوس نام و ستون نام آن حذف شده

$$trace(adj A) = \left(\frac{1}{\lambda_1} \dots \frac{1}{\lambda_n} \right)$$

(λ_i مقدار ویژه A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad R = trace(adj A)$$

چون ماتریس قطری می باشد مقادیر ویژه برابر درایه های روی قطر اصلی 0، 5، 4، 3، 2، 1

$$trace(adj A) = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = \left(\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \right)$$

$$A^{-1} (det A = -1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3+2=5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

خطی سطر و ستون عوض
نکرانند

$$\frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \quad (Ax = b \text{ برای اصل دستگاه})$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

det A

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

det A

$$z = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

det A

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

det A

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

det A

$$z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

det A

$$\det A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (32 + 54 + 9) - (24 + 12 + 54) = 5$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$\text{if } \lambda = 1 \rightarrow Ax = \lambda x = x \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{if } \lambda = 2 \rightarrow Ax = \lambda x = 2x \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{note: } Ax = \lambda x \rightarrow A^m x = \lambda^m x$$

$$\begin{cases} A(m_1 + m_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ A^m(m_1 + m_2) = \lambda_1^m x_1 + \lambda_2^m x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_1 + C_2 = 2 \rightarrow C_2 = 1 \end{cases} \quad \textcircled{1} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow A^{100} A^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda^{100} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda^{100}}{2^{100}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{100} \\ 2^{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{100} \\ 1 + 2^{100} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه λ را مقدار ویژه ماتریس $A_{n \times n}$ می‌نامند هرگاه رشتۀ معادله مشخصه $\det(A - \lambda I) = 0$ باشد

اگر $A_{n \times n}$ باشد حداکثر n مقدار ویژه حقیقی دارد. (پس می‌تواند λ عدد مختلط باشد)

در صورتی که مقادیر ویژه ماتریس A متغایر باشد ماتریس A را **متغایر** می‌نامند.

$$A_{n \times n} x_{n \times 1} = \lambda x_{n \times 1} \quad \downarrow \quad \text{اسکالر}$$

note: حاصل ضرب مقادیر ویژه $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

$\text{trace} = \sum \lambda_i$ ← مجموع مقادیر ویژه

note: اگر $\det A = 0$ باشد حداقل یک مقدار ویژه صفر داریم

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 0$

زیرا هم سطرها شبیه‌اند از طرفی اگر ۲ سطر از ماتریس دقیقاً شبیه هم باشند یک $\lambda = 0$ و در اینجا ۳ سطر شبیه هم اند پس $\lambda_1 = 0$ و $\lambda_2 = 0$

$\text{trace}(A) = 2 + 2 + 2 = 6$

$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 \rightarrow \lambda_3 = 6$

Ex: اکنون برای $\lambda = 0$ مساوی قبل را به دار ویژه به دست می‌آوریم.

$Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

$x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 0 \rightarrow x_3 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \rightarrow x_3 = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

نکته: چینه صفای صاف
 همانی ندارند پس به
 جای آنها 1 میاریم.

$$\det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 4-1 & -2 \\ 5 & -3-1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-1)(-3-1) + 10 = 0 \rightarrow (1-4)(1+3) + 10 = 0$$

$$1^2 - 1 - 12 + 10 = 0 \rightarrow 1^2 - 1 - 2 = 0 \rightarrow (1-2)(1+1) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 2 \quad \lambda = -1$$

مقسوم علیه

$$\lambda^2 + \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 \quad \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$-(\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2) \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$-(2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda) \quad \text{خارج قسمت}$$

$$3\lambda^2 + 4\lambda + 1$$

$$-(2\lambda^2 - 2\lambda - 4) \quad \text{مقسوم علیه}$$

$$6\lambda + 5$$

باقی مانده

$$= 6A + 5I$$

$$= 6 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = B^T = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{در این صورت } B \text{ را باید پیدا کرد}$$

حل 2

$$A = P D P^{-1}$$

ستون های ماتریس P
 بردارهای ویژه A هستند

ماتریس قطری از بردارهای ویژه

روی قطر اصلی مقادیر ویژه
 A است

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \rightarrow D = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

$$A = P \sqrt{D} \sqrt{D} P^{-1} \rightarrow \underbrace{P \sqrt{D} P^{-1}}_B \underbrace{P \sqrt{D} P^{-1}}_B = B^2$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

محاسبه مقادیر ویژه:

$$\det \begin{bmatrix} 4-3 & 3 \\ 5 & 3-1 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-1)(3-1) - 6 = (1-4)(1-3) - 6 \Rightarrow 1^2 + 12 - 71 - 6 = 1^2 - 71 + 12 = 0$$

$$(1-4)(1-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

if $\lambda = 9 \rightarrow Ax = \lambda x = 9x$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 9x_1 \\ 3x_2 &= 5x_1 \end{aligned}$$

حاصل می شود

$$x_1 = 1 \rightarrow x_2 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

if $\lambda = 1 \rightarrow Ax = \lambda x = x$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= x_1 \\ 3x_2 &= -3x_1 \\ x_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = -1$$

$$x_1 = 1 \rightarrow x_2 = -1$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

حاصل می شود

$$P^{-1} = \frac{1}{(-1 - \frac{5}{3})} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{8} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$B = P \sqrt{D} P^{-1} \quad \square$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ب چند ضلعی می شود

ب چند ضلعی می شود: کوچک ترین چند ضلعی که ضلعی A دارد آن ضلعی است

$$P(n) = (n-1)(n-2)$$

ب چند ضلعی می شود

اگر n دینال باشد

$$P_1 = (x-1)(x-2)$$

$$(A-I)(A-2I) = 0$$

است. اگر n دینال باشد

ب چند ضلعی می شود

$$P(n) = (n-1)^2(n-2)^2$$

ب چند ضلعی می شود

Subject

$$P_1 = (x-1)(x-2) \rightarrow (A-I)(A-2I) = 0$$

این معجزه بود که روی نام بعدی

$$ii) P_2 = (x-1)^2(x-2)$$

$$P_3 = (x-1)^3(x-2)$$

$$P_4 = (x-1)^4(x-2)$$

$$P_5 = (x-1)^5(x-2)$$

$$P(n) = (x-2)(x-3)(x-5) E_n$$

$P(n)$ چند جمله ای مرتبه ۳ باشد. در این صورت دقیقاً همین $P(n)$ عیناً است زیرا ریشه ها ساده اند.

چون پاشنه مثلث

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow (x-2)(x-3)$$

$$P = A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow (x-2)(x-5)$$

حل

کدام

$$(x-2)(x-3)(x-5)$$

حاصل

چند مانع هندسی: ابتدا چند جمله ای عیناً را پیدا کرده توان های بالاتر را برابر با چند جمله ای

$$P = (x-1)(x-5) \quad \begin{cases} n=1 \\ n=5 \end{cases}$$

عیناً

هندسی:

چند مانع جبری

حاصل

ابتدا چند جمله ای مرتبه را پیدا کرده توان های بالاتر را برابر با چند مانع جبری

$$P = (x-2)^3 \quad \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

۱) غالب قطری را بسطی است P استاندارد $1-1-1 > 1+1+1$ ✓

سردوم $1-1-1 > 1+1+1$ ✓

سردوم $1-1-1 > 1+1+1$ ✓

غالب قطری سردی است.

سردوم $1-1-1 > 1+1+1$ ✓

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

تقریباً برابر غالب قطری سردی است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{استون} = 1-1-1 > 1+1+1 \quad \checkmark$$

$$\text{استون دوم} = 1-1-1 > 1+1+1 \quad \checkmark$$

$$\text{استون سوم} = 1-1-1 > 1+1+1 \quad \checkmark$$

غالب قطری سردی است

روش توانی: برای پیدا کردن بردارهای متعامد از مافا قدر مطلق. (که روش سردی)

ابتدا u را در خواص [با عینکه در ده یاد خواص] $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ را انتخاب کرده و Au را به دست آورده (که بردار ستون است).

بردار متعامد u_2 از مافا قدر مطلق را با روش زیر گرفته

$$u_1 = w, \quad Au_1 = w_1 \quad (\text{بردار متعامد مافا قدر مطلق})$$

در مرحله بعد Au_1 را ضرب کرده و عملیات بالا را تکرار می‌کنیم.

$$u_{n+1} = \frac{1}{\|Au_n\|} Au_n$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Au_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 \\ 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = w_1 = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = u_2$$

$$Au_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{50}} \\ \frac{7}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{50}} + \frac{7}{\sqrt{50}} \\ \frac{10}{\sqrt{50}} + \frac{35}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{\sqrt{50}} \\ \frac{45}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} = \frac{9}{\sqrt{50}} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = u_3$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = 9, 14.7 \quad w_2 = 9, 14.7$$

$w \rightarrow u = 4$ بردار متعامد A از مافا قدر مطلق

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Au_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = w_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = u_2$$

$$Au_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 10 & 17 \end{bmatrix}$$

وارده پیدا می‌شود.

$$A = LU$$

تجزیه دولیتل

$$A = LU$$

تجزیه کرامت

$$A = LL^T$$

تجزیه چولسکی

در دولیتل روی قطرهاست ماتریس یک است در کرامت روی قطرهاست ماتریس u یک است.
(L ماتریس پایین مثلث و u ماتریس بالا مثلث)

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$$

ملاحظه این که ماتریس تجزیه چولسکی داشته باشد.

(1) اولاً A در آیه های روی قطرهاست این همه مثبت

(2) دترمینان زیرماتریس های اصلی آن (در عینا قطرهاست) همه مثبت

$$\begin{pmatrix} |1 \times 1| \\ \hline |2 \times 2| \\ \hline |3 \times 3| \end{pmatrix}$$

ماتریس A معین مثبت باشد.

م زیرماتریس های اصلی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{تجزیه دولیتل}$$

روی قطر اصلی

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 9 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

$$G_1 = \sqrt{1} = 1 \quad G_2 = \sqrt{9} = 3 \quad G_3 = 0$$

$$\Sigma_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر $\lambda = 1 \rightarrow (A^T A) v_1 = 1 v_1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3a + b + c = a \\ a + 3b + c = b \\ a + b + 3c = c \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{norm}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\text{if } \lambda = 9 \rightarrow (A^T A) v_2 = 9 v_2$$

$$\rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{norm}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{if } \lambda = 0 \rightarrow (A^T A) v_3 = 0 v_3 \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|v_3| = \sqrt{1 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{norm}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$V_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$u_i = \frac{A v_i}{G_i} \quad \begin{matrix} G_1 = 1 & u_1 = \frac{A v_1}{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \\ G_2 = 3 & u_2 = \frac{A v_2}{3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ G_3 = 0 & u_3 = \frac{A v_3}{0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$u_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} E$$

روش های تکراری برای حل معادله:

$$f(x) = x - \tan x$$

از روش های حل این معادله روش تکراری

Fixed Point نقطه ثابت

NR روش نیوتون رافسون

Newton Raphsan

روش دیگری روش پرتابی ... و ...

$$|x_n - x_{\text{exact}}| < \varepsilon$$

از یک نقطه شروع استفاده کرده و آن را بهبود بخشیده
ع راضی‌کننده قابل قبول نماند که $x = 1 - x^2$ جواب دقیق جواب تقریبی

$$f(x) = x - g(x)$$

روش نقطه ثابت برای حل دستگاه

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_n, y_n) \\ h(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

که در دستگاه

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x + 8 = 0 \\ x + xy^2 - 10y + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{با نقطه}$$

$$x_{n+1} = \frac{-1}{10} [-x_n^2 - y_n^2 - 8]$$

$$y_{n+1} = \frac{-1}{10} [-x_n - x_n y_n^2 - 8]$$

$$x_1 = \frac{-1}{10} [-(0.8)^2 - (0.8)^2 - 8] = -0.185$$

$$y_1 = \frac{-1}{10} [-0.8 - (0.8)(0.8)^2 - 8] = -0.18425$$

$$x_2 = \frac{-1}{10} [-(0.185)^2 - (0.18425)^2 - 8] = -0.9444$$

$$y_2 = \frac{-1}{10} [-0.185 - (0.185)(0.18425)^2 - 8] = -0.94823$$

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

$$|y_{n+1} - y_n| < \varepsilon$$

این فرآیند ادامه دارد.

Subject

$$\begin{cases} 1 + x_1 + x_2 = 11 \\ 2x_1 + 10x_2 = 12 \end{cases}$$

تاریخ: ...
 نام: ...
 شماره: ...
 هجری: ...

روش ژاکوبی:

$$x_1 = \frac{1}{10} [11 - x_2]$$

نقله

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10} [11 - 0] = 1,1$$

$$x_2 = \frac{1}{10} [12 - 2x_1], \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{10} [12 - 2(1,1)] = 1,2$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10} [11 - 1,2]$$

$$\left| \begin{matrix} x & -x \\ n+1 & n \end{matrix} \right| < \epsilon$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10} [12 - 2(1,1)]$$

$$\left| \begin{matrix} x & -x \\ n+1 & n \end{matrix} \right| < \epsilon$$

$$\left| \begin{matrix} x & -x \\ n+1 & n \end{matrix} \right| < \epsilon, \left| \begin{matrix} x_1^{(n+1)} & -x_1^{(n)} \\ n+1 & n \end{matrix} \right| < \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

* روش نایم سنیدل GS با نقله سه (:) $\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{10} [11 - 0] = 1,1 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{10} [12 - 2(1,1)] \end{cases}$

وارد فریم می شود