

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A^{-1} = ?$$

Ex-2

Note: در تعیین ماتریس بالا ضرایب را بدین روشاتی و قدری برای حاصل ضرب درایه های میانی

$$\det A = 3(4)(5) = 60 \neq 0$$

قدر اصلی

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^2 (20 - 0) = 20$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 (0) = 0$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 (0) = 0$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-2)$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ -2 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 20 & 0 & -2 \\ 0 & 15 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \square$$

فریب ۲ ماتریس:

در ضرب ۲ ماتریس باید تعداد ستون A (ماتریس اول از چپ) مساوی تعداد سطر B (ماتریس دوم از چپ) باشد

$$B \times A \rightarrow BA = B_{2 \times 3} \times A_{3 \times 2} \rightarrow \text{مساوی است}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_{2 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2 \times 7) + (3 \times 6) & (-2 \times -1) + (3 \times 0) & (-2 \times 0) + (3 \times 2) \\ (4 \times 7) + (5 \times 6) & (4 \times -1) + (5 \times 0) & (4 \times 0) + (5 \times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 58 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

note: آیا ماتریس های A و B مربعی و A و B باشد (A+B) و (BxA) مساوی است
در تعیین ماتریس A (det A):

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det A = ad - bc \text{ است برای } \det A \text{ مربعی باشد در این صورت}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{2 \times 2}$$

$$\det A = (3 \times 0) - (4 \times 1) = -4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-2 - 20) - 2(-1 - 4) + 3(5 - 2) = 22 + 10 + 9 = 41$$

ماتریس معکوس (A^{-1})

برای A مربعی باشد، $\det A \neq 0$ باشد آنگاه A^{-1} موجود است

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det A \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

note: (برای A^{-1} در 3×3 و بالاتر به سطر ها $\det A = 0$ باشد)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t \rightarrow \text{ترانپوز}$$

ترانپوز: یعنی جای سطر و ستون در ماتریس عوض می شود.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ماتریسها:

بردارها نوعی از ماتریس ها هستند

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

ماتریسها به تعداد سطرها و ستون برابر باشند برعکس در غیر این صورت مستقل نیستند

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

+ و - ماتریس که در آن ها غیر قطر اصلی صفر باشد (روی قطر اصلی)

عدد را فقط در تکرار صفر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس که در آن ها زیر قطر اصلی صفر باشد

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی: در آن ها بالا قطر اصلی صفر باشد

ماتریس صفر: ماتریس که همه در آن ها صفر باشد

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$I_{n \times n} = I_{3 \times 3} \text{ و } I_{2 \times 2}$$

ماتریس همانی

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

روی قطر اصلی یک و بقیه ها در آن ها صفر باشد

جمع ۲ ماتریس:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

عکسینگی ماتریس (-A)

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = A + (-B)$$

m x n m x n

تفاضل

تکثیر سطرها و ستون برابر باشد

$$A - B = I$$

$$-B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Subject

Date / /

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) \quad (z=0 \rightarrow dz=0)$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = x dy = (r \cos \theta)(r \cos \theta d\theta) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \rightarrow dy = r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 9 \cos^2 \theta d\theta \rightarrow \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} 9 \cos^2 \theta d\theta = 9 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 9 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 9\pi$$

اگر $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ (پس $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$)

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(1-0) - \mathbf{j}(0-1) + \mathbf{k}(1-0)$$

$$= (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (1, 1, 1)$$

$$\text{معادله ۱ از روی } x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}}$$

$$= \frac{r\mathbf{i} + r\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{\sqrt{(rx)^2 + (ry)^2 + (rz)^2}}$$

$$\mathbf{n} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dxdy = \mathbf{n} r dr d\theta$$

معادله ۲

$$g: x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) dxdy = \frac{r\mathbf{i} + r\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{r^2} r dr d\theta$$

$$= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) dxdy$$

$$\iint \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = \iint \frac{x+y+\sqrt{9-x^2-y^2}}{r} \cdot \frac{r}{2\sqrt{9-x^2-y^2}} dxdy$$

$$= \iint \frac{x+y+\sqrt{9-r^2}}{r} \cdot \frac{r}{\sqrt{9-r^2}} r dr d\theta$$

$$r \cos \theta \rightarrow r \sin \theta$$

Subject

Date / /

ایک فنکشن $r(t) = (1-t)i + tk$ و q و p به سبب جبری نامشخص باشند یعنی
 $q = p = \nabla F$ در این صورت p را طوری به دست آورید که $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt = i(1-1) - j(1-1) + k(1-1) = 0$$

فرض می‌کنیم $\mathbf{F} = \nabla F = (y+2)i + (x+2)j + (x+y)k$ را دارد

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y+2 \quad \text{نسبت به } x \text{ مشتق} \quad F = xy + x^2 + h(y, z) \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{\partial h}{\partial y} = x+2 \quad \text{فرض می‌کنیم}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2 \quad \text{مشتق نسبت به } y \quad h = 2y + g(z)$$

$$F = xy + x^2 + 2y + g(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x+1 = g'(z) = p = x+y \quad \text{در نهایت} \quad g'(z) = y+1$$

$$g(z) = zy - z + C \quad \text{نسبت به } z \text{ مشتق}$$

$$F = xy + x^2 + 2y + zy - z + C \quad \square$$

پس داریم:
قضیه استوکس

فرض کنید یک رویه جهت دار S با مرز C است. همچنین فرض کنید میدان برداری
 مشتق پذیر و بر S تعریف شده است. در این صورت
 جهت برداری است که از روی C می‌آید
 بر هر نقطه در S است.

$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ در بالای صفحه x یعنی $z=0$ قرار دارد
 و بردار جهت در n روی جهت عمود صفحه z است. $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ حال در این
 قضیه استوکس را تحقیق کنید!

$$F(x, y, z) \rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (2dx + xdy + ydz) = \int_0^1 xdy$$

Subject

$$x - 2y = \pm 1$$

Date / /

$$x + 2y = \pm 2$$

Ex

$$\iint (x^2 - y^2) dx dy$$

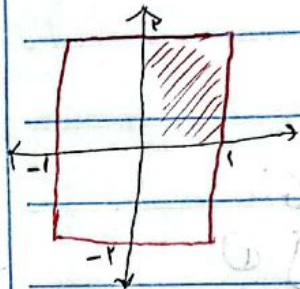
$$x - 2y = u$$

$$x + 2y = v$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$J = \frac{1}{J'} = \frac{1}{4}$$

$$u = \pm 1, v = \pm 2$$



$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$$

$$\int_0^1 du \int_0^2 \frac{1}{4} u v dv = \int_0^1 \frac{1}{4} \left(u - \frac{v^2}{2} \right) du$$

$$\int_0^1 \frac{1}{4} \left(u - \frac{v^2}{2} \right) du = \frac{u^2}{8} \Big|_0^1 \rightarrow \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} \times 4 = 1 \quad \square$$

Ex: مطلوب است محاسبه $\int_C (x + z^2) ds$ در فضای حاصل از تقاطع استوانه $x^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 2$



$$x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ z = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} dx = -\sin t dt \\ dz = \cos t dt \end{cases}$$

$$x + y + z = 2 \rightarrow y = 2 - x - z = 2 - \cos t - \sin t$$

$$dy = (-\sin t - \cos t) dt$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\sin t - \cos t)^2 + (\cos t)^2} dt$$

$$= \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t} dt = \sqrt{2(1 - \sin t \cos t)} dt$$

$$\int_C (x + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin^2 t) \sqrt{2(1 - \sin t \cos t)} dt \quad \square$$

نکته: زمانی که نیرو یا پستار باشد $(\text{curl } F = 0)$ در این صورت F را می‌توان به صورت $F = \nabla F$ نوشت

$$F = \nabla F$$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$

Ex: اگر F را با نام سه نقطه میانی $F = (y+z)i + (x+z)j + (x+y)k$ در نظر بگیریم

note: قسمت از بدنه استوانه 2 added

En: قسمت از بدنه استوانه

$$z=0 \text{ یا } xy \text{ صفحه} \rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

$$\iint_{\text{area}} d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta - \sin \theta) d\theta = \theta - \sin \theta + \cos \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$= \int_C (x^2 + y^2) ds$$

$$C: \frac{\cos t}{n} i + \frac{\sin t}{y} j + \frac{t}{2} k$$

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

$$ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt = \sqrt{3} dt$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + t^2) \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} (\cos t + t^2) dt = \sqrt{3} \left(\sin t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{3}\pi^3}{3}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx dy = ? \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad r dr d\theta$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad 0 < y \leq 1$$

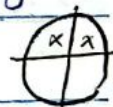
$$\text{if } y > 0 \rightarrow r \sin \theta > 0$$

$$\sin \theta > 0 \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\text{if } y < 1 \rightarrow r \sin \theta < 1 \Rightarrow r < \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\text{if } r < x \rightarrow r \sin \theta < r \cos \theta$$

$$\Rightarrow r \sin \theta < \cos \theta \Rightarrow r < \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow r < \cot \theta$$



Subject

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Date

/ /

n:

$$\iint F \cdot n \, d\sigma$$

انتگرال

$$F = (x, y, z)$$

$$n = r_m i + r_y j + r_z k$$

$$\sqrt{(r_m)^2 + (r_y)^2 + (r_z)^2} \rightarrow r_a$$

$$= \left(\frac{x}{a} i + \frac{y}{a} j + \frac{z}{a} k \right) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right)$$

$$F \cdot n = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a} = a$$

$$\iiint a \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a \cdot \sin \theta \, d\theta = 4\pi a^3$$

تعبیر کرده رابره

است

$$\text{انتهای } F_m: \iint (x^m dy dz + y^m dz dx + z^m dx dy) \quad (\text{تعریف دیگر قضیه وایراییس}) \quad \text{که در اینجا } x$$

برای محاسبه رابره استوانه $x^2 + y^2 = r^2$ و صفحات $z=0$ و $z=r$ است (قاعده فوقانی)



$$F = (m, n, p) \rightarrow (x, y, z)$$

استوانه رابره راسته ایست.

$$\text{div } F = \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint \frac{\text{div } F}{r^3} \, d\sigma = 3 \int_0^r dz \int_0^r r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = 3(r)(r) 2\pi = 12\pi r^2$$

در سقف استوانه یک دایره داریم (انتگرال ۲ گانه) $z=r$ ثابت است.

$$r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r \, dr = 2(2\pi)(r) = 4\pi r$$

$$\square \quad 12\pi r^2 - 4\pi r = 8\pi r$$

$$F_m: \text{قضیه وایراییس برای } F = \left(\frac{m}{x}, \frac{y}{y}, \frac{z+m}{p} \right) \text{ وایراییس } x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

و $z=0$ و $z=r$ محاسبه کنید.

$$\text{div } F = \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint 3 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r \, dr \int_0^r dz$$

در آخر ① + ② + ③ جواب مساوی است.

$$\iint \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\frac{\pi}{2}}^x (-\sin x - 2) dy$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin x - 2) \frac{\pi}{2} x dx$$

انتگرال
مشتق

x	$\sin x$
1	$-\cos x$
0	$-\sin x$

$$= -x \cos x + \sin x$$

تعیین واندیس: (دیورانس)

شکل سطح باشد که جسم فضا در بر گرفته باشد و در کارهای تمام به سطح در هر نقطه با جهت مثبت، محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ بسازد آنرا $F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ آنرا در این ناحیه پیوسته ضرب داخلی

$$\iiint \nabla \cdot F = dv = \iiint F \cdot n d\sigma$$

$$= \iiint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx$$

$$= \iiint (M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma) d\sigma$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad F = (M, N, P)$$

$$\text{div } F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Em: تعیین واندیس برای

$F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $\rho = a$ تعیین کنید

$M = x$
 $N = y$
 $P = z$

$$\text{div } F = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint \text{div } F dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^a \rho^2 \sin \phi d\rho = 4\pi a^3$$

↓
div F

$$\int_M d + n d \rightarrow \int_0^{2\pi} (-2a \sin \theta)(-a \sin \theta d\theta) + (3a \cos \theta)(a \cos \theta d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} 2a^2 \sin^2 \theta + 3a^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

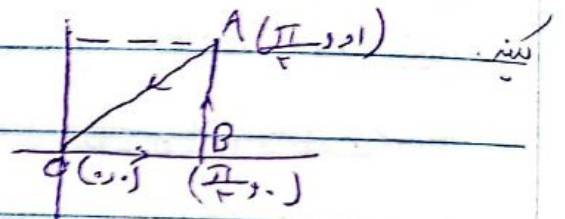
$$= 2a^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} + 3a^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= a^2 \pi + 3a^2 \pi = 4a^2 \pi$$

$F = (-2y + \sin x)i + \cos x j$ برای میان

$M = -2y + \sin x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2$

$N = \cos x \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin x$



$\int_{OB} + \int_{AB} + \int_{AO}$

OB: $y=0 \rightarrow dy=0$
 $x \text{ from } 0 \text{ to } \pi$

BA: $x=\pi \rightarrow dx=0$
 $y \text{ from } 1 \text{ to } 0$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$
 $y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 1 = -1(x - 0) \rightarrow y = 1 - x$

$\int_M dx + N dy$ چون در حال تغییر dx و dy

OB: $M = -2y + \sin x = -2(0) + \sin x = \sin x$
 $N = \cos x$

BA: $M = -2y + \sin x = -2(1) + \sin \pi = -2$
 $N = \cos x = \cos \pi = -1$

AO: $M = -2y + \sin x = -2(1) + \sin 0 = -2$
 $N = \cos x = \cos 0 = 1$

$dx + N dy = \left(\frac{1}{\pi} x + \sin x \right) dx + \cos \left(\frac{1}{\pi} x \right) dy$

OB: $\int_0^\pi M dx = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -[\cos \pi - \cos 0] = 1$

BA: $\rightarrow$

BA: $\int_1^0 \frac{1}{\pi} x + \sin x + \frac{1}{\pi} \cos x dx$
 $= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \right) - \cos x + \frac{1}{\pi} \sin x \Big|_1^0$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \rightarrow x^2+y^2 < \delta^2 \quad f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} \quad (m,y) f(x,y)$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \rightarrow x^2+y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \quad \text{پس } (x^2+y^2)^2 \geq 4x^2 y^2$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{4} \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)} \rightarrow \frac{(x^2+y^2)^3}{4} \geq x^2 y^2 = 0$$

$$\delta = \sqrt[3]{4\varepsilon} \rightarrow \left(\frac{x^2+y^2}{4} \right) \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)} \rightarrow \varepsilon = \frac{\delta^3}{4} > \frac{(x^2+y^2)^3}{4} \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)}$$

$$y = mx \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (m,y) f(x,y) : \text{محدود دارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} \rightarrow \text{if } m=1 \rightarrow \frac{1}{2} \quad x=y=0$$

$$\rightarrow \text{if } m=2 \rightarrow \frac{2}{5}$$

دارای حد نیست - زیرا برای m های مختلف جواب متفاوت دارد

تفسیر: هرگاه منحنی C منحنی بسته ای در صفحه xy باشد به طوری که محوری محورهای مختصات منحنی را حاشیه در نقطه قطع کند و m و n و $\frac{\partial m}{\partial x}$ و $\frac{\partial n}{\partial y}$ روی منحنی C و در داخل آن تابع پیوسته باشد و R ناحیه داخل منحنی C باشد آنگاه

$$\int m dx + n dy = \iint \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y} \right) dR \rightarrow dR = dx dy$$

تفسیر: برای $F = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3$ وایه های $r=a$ تحقیق کنید

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial y} = -2 \quad \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} = 3 - (-2) = 5$$

$$\int \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a 5 r dr$$

$$= 5\pi \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^a = 5\pi \frac{a^2}{2}$$

$$m = -\frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}a \sin \theta$$

$$n = \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}a^3 \cos^3 \theta$$

$$dx = -a \sin \theta d\theta$$

$$dy = a \cos \theta d\theta$$

در فضای $\mathbb{R}^2$ فضای نقطه a یک دایره به شعاع δ می باشد

f_n : نشان دهنده برای تابع $f(x, y) = x$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} f(x, y) = 0$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - (-1)| < \delta \rightarrow |f(x, y) - 0| < \epsilon$
 $|y - 0| < \delta$

$|f(x, y) - 0| = |x - (-1)| < \epsilon$

مانند است $\epsilon = \delta$ شود (اختیار بردن مقدار من شود)

روش دوم: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) - (-1)| < \epsilon$

$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

چون δ مثبت است

پس $\epsilon = \delta$ (مانند است اختیار شود)

نمونه نشان دهنده تابع $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ در فضای $\mathbb{R}^2$ (مانند است)

$y = mx$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{x - mx}{x + mx} = \frac{1-m}{1+m}$

if $m = 2 \rightarrow \frac{-1}{3}$

if $m = 3 \rightarrow \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

برای همه مقادیر جواب های مختلف داریم پس دارای حد نیست.

نمونه (فضای حد)

قضیه حد در فضای $\mathbb{R}^2$ به قضیه حد در فضای $\mathbb{R}$ شبیه است.

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f+g) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g$

ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \cdot g) = (\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f) \cdot (\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g)$

iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g}$
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) \neq 0$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$A(1, 1)$$

$$x=t \rightarrow dx=dt$$

$$y=t \rightarrow dy=dt$$

$$z=t \rightarrow dz=dt$$

$$\int M dx + N dy + P dz$$

$$M = x^2 + y = t^2 + t$$

$$N = y^2 - x = t^2 - t$$

$$P = z^2 + y = t^2 + t$$

$$\int_0^1 (t^2 + t) dt + (t^2 - t) dt + (t^2 + t) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1$$

$$M = x^2 + y = t^3 + t^2 = 2t^2$$

$$N = y^2 - x = t^2 - t$$

$$P = z^2 + y = t^2 + t^2$$

$$\int M dx + N dy + P dz = \int_0^1 2t^2 dt + (t^2 - t) dt + (t^2 + t^2) dt$$

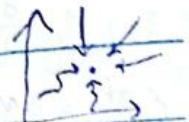
نکته: در این مثال، تابع چند متغیره:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{برای تابع یک متغیره بصورت زیر داشته باشیم}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

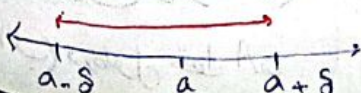
$$\lim_{(m,y) \rightarrow (a,b)} f(m,y) = L \quad \text{برای تابع دو متغیره}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta, |y - b| < \delta \rightarrow |f(m,y) - L| < \epsilon$$



نکته: برای بحث پیوسته، نیاز به درصدهای متفاوت مرتب بین جواب داریم.
 یا به (در حالت یک متغیره) حدیپ و راست و $P(a)$ را بیس (حکود)

نکته: (مستقیم) $(a - \delta, a + \delta)$ یک همای برای a در $\mathbb{R}$ محسوب میشود.



Subject

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (p^r)^{\frac{r}{r}} = p^r$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_b^a \frac{p^r}{p^{\frac{r}{2}}} dp \rightarrow \int_b^a \frac{1}{p} dp = \ln p \Big|_b^a = \ln a - \ln b$$

$$= 2\pi(2\pi) \ln\left(\frac{a}{b}\right) = 4\pi^2 \ln \frac{a}{b}$$

نقطه A به نقطه B (انتقال عنصر الخط) $F = (m, n, p)$

$$\int F \cdot dR = \int (m, n, p) \cdot (dz, dy, dx)$$

$$= \int m dx + n dy + p dz$$

در صورتی که بار انجام شده وابسته به مسیر (مسیر خاص است) و غیر حفظی (شکل دارد) $\nabla \cdot F = 0$ باشد باید از آن استفاده کرد.

فرجه

$$\text{curl } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

$\text{curl } F = 0$ اگر $\text{curl } F = 0$ باشد نیرو پایدار است - (کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد)

$$\text{curl } F = i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ n & p \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ m & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ m & n \end{vmatrix}$$

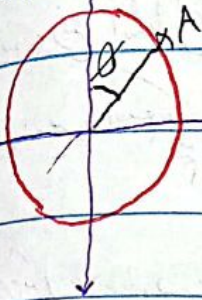
$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial z} \quad \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial z} \quad \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}$$

invariant اگر $\text{curl } F = 0$ باشد در این صورت

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial z} \\ \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial y} \end{cases}$$

فرض کنید نیروی بار را به $F = (x^2+y^2)z + (x^2-y^2)z + (x^2+y^2)k$ از آن تابعی

محسبات با (ادوات) A با یک از دو مسیر زیر است -
الف) در طول خط A ب) در $z=t^2$ و $y=t^2$ و $x=t$



حجم مختصات کروی
 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
 ρ مربوط به شعاع رادیه است
 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$

$\tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

$x = \rho \cos \theta \sin \phi$
 $y = \rho \sin \theta \sin \phi$
 $z = \rho \cos \phi$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \phi \leq \pi, \rho \geq 0$

note: اگر نقطه‌ای روی پوسته کره باشد از A به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم (OA) و زاویه

میشود زاویه بین خط OA با جهت مثبت محور z ها زاویه ϕ را می‌سازد.

$0 \leq \phi \leq \pi$ (زاویه ϕ کم تر از π است.)

note: (زاویه بین در مختصات کروی)

دترمینان جابجایی 3×3

$\frac{\partial x}{\partial \rho}$	$\frac{\partial x}{\partial \theta}$	$\frac{\partial x}{\partial \phi}$
$\frac{\partial y}{\partial \rho}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta}$	$\frac{\partial y}{\partial \phi}$
$\frac{\partial z}{\partial \rho}$	$\frac{\partial z}{\partial \theta}$	$\frac{\partial z}{\partial \phi}$

$= \rho^2 \sin \phi$

note: در مختصات کروی داریم:

$\rho^2 \sin \phi$

$\iiint dx dy dz = \iiint \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$

زاویه بین پوسته

note: در مختصات قطبی داریم:

$\iiint dx dy dz = \int dz \int \int \rho d\rho d\theta$

$\phi = \rho \sin \theta$
 $0 \leq \rho \leq a$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $0 \leq \phi \leq \pi$

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho$

note: حجم کره به شعاع a

$= 2\pi \left(2 \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a^3$

$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{\pi} = -(-1 - 1) = 2$

$\iiint \frac{dm dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\rho = a$
 $\rho = b$
 $a > b$

که ρ ثابت

$A = x \frac{w}{x} + y \frac{w}{y} + 2 \frac{w}{z}$ p d p . d p
 $\frac{y}{x} = u \quad \frac{z}{x} = v$ $w = x^r f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

$w_x = x^r \left(f_u \left(\frac{-y}{x^2} \right) + f_v \left(\frac{-z}{x^2} \right) \right) + x^r f(u, v) \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$

$w_y = 0 + \left(f_u \left(\frac{1}{x} \right) + 0 \right) x^r = x^r f_u$

$w_z = 0 + f_v(0) + f_v \frac{1}{x} x^r = x^r f_v$

$A = x(x^r f_u - y f_u - 2 f_v) + y x^r f_u + 2 x^r f_v$

$A = x^r f \rightarrow A = x^r w$

$\iint \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad y \geq x \quad x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq r^2$

$x^2 + y^2 = r^2 \geq 1 \rightarrow r \geq 1$

$x^2 + y^2 = r^2 \leq r^2 \rightarrow r \leq r$ if $y \geq x \rightarrow r \sin \theta \geq r \cos \theta \rightarrow \tan \theta \geq 1$

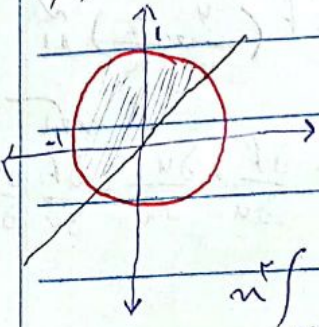
$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^r \frac{r}{\sqrt{r^2}} dr \rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^r 1 dr$
 $\left[\theta r \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \rightarrow \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

Subject

Date / /

$$\iint x^r \sqrt{x^r + y^r} dx dy$$

$$\begin{aligned} x^r + y^r &\leq 1 \\ y &\geq x \end{aligned}$$



$$\int_{-1}^0 dx \int_x^{\sqrt{1-x^r}} x^r \sqrt{x^r + y^r} dy$$

$$y = x \tan \theta \rightarrow dy = x(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

$$x^r \int_x^{\sqrt{1-x^r}} \sqrt{x^r + x^r \tan^2 \theta} x(1 + \tan^2 \theta) d\theta$$

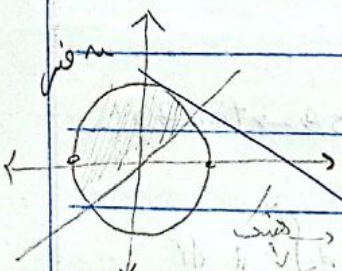
$$x^r \int_x^{\sqrt{1-x^r}} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} (1+\tan^2 \theta) d\theta \quad \begin{aligned} \tan \theta &= u \\ du &= 1 + \tan^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$x^r \int \sqrt{1+u^2} du$$

$$\rightarrow x^r \int_x^{\sqrt{1-x^r}} (\sec^2 \theta)^{\frac{r}{2}} d\theta = x^r \int \sec^r \theta d\theta$$

$$\iint x^r \sqrt{x^r + y^r} dx dy$$

$$\begin{aligned} x^r + y^r &\leq 1 \\ y &\geq x \end{aligned}$$



$$\int_{-1}^0 \int_x^{\sqrt{1-x^r}} \frac{r}{r} \cos \theta \sqrt{r^r} r dr d\theta$$

مثال بالصور

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$r^r \cos^r \theta + r^r \sin^r \theta \leq 1$$

$$r^r(1) \leq 1$$

$$\text{if } y \geq x \rightarrow r \sin \theta \geq r \cos \theta \rightarrow \tan \theta \geq 1$$

$$x = r \cos \theta \rightarrow x \leq r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \rightarrow y \geq r \sin \theta$$

$$x^r + y^r = r^r$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

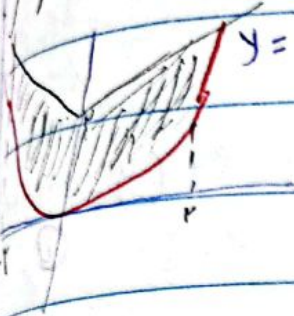
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{r}{\cos \theta}}^{\frac{r}{\sin \theta}} r^r \cos \theta dr$$

$$\int r^r \cos \theta dr = \frac{r^{\frac{r}{2}}}{\frac{r}{2}} \Big|_{\frac{r}{\cos \theta}}^{\frac{r}{\sin \theta}} = \frac{1}{\frac{r}{2}}$$

$$\cos \theta \cdot \frac{1 + \cos \theta}{r}$$

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{r} + \frac{\cos \theta}{r} d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{r} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \left(\frac{1}{r} \sin \theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$\int rxy \, dx \, dy \rightarrow$



$y = r + |x|$

if $x > 0 \rightarrow r + x = x^r \rightarrow x^r - x - r = 0$

$(x-r)(x+1) \rightarrow x = r \checkmark$

$x = -1 \quad x$

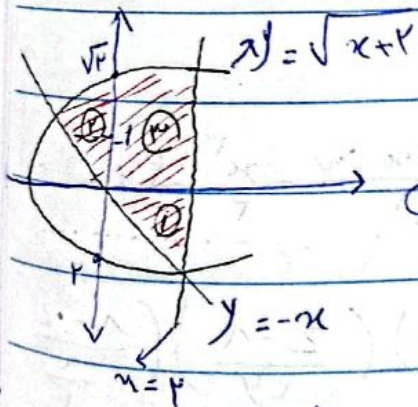
if $x < 0 \rightarrow r - x = x^r = x^r + x - r = 0$

$(x+r)(x-1) = 0$
 $x = -1 \quad x$

$\int_{-r}^0 dx \int_{x^r}^{r-x} rxy \, dy + \int_0^r dx \int_{x^r}^{r+x} rxy \, dy \rightarrow$

$\int_{-r}^0 r x \left(\frac{y^r}{r} \right) dx \Big|_{x^r}^{r-x} + \int_0^r r x y^r dx \Big|_{x^r}^{r+x}$

$\iint r x \, dx \, dy$
 $y^r = x + r \rightarrow y = \sqrt[r]{x+r}$
 $y = -x$
 $x = r$



$\int_{-r}^0 dy \int_{-y}^r r x \, dx$

$\int_0^r dy \int_{-y}^0 r x \, dx + \int_r^{\sqrt{r}} dy \int_{y^r-r}^0 r x \, dx$

$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x+r}}^{\sqrt{x+r}}$

$y = \sqrt{x+r} \quad x = -r \rightarrow y^r = x^r$

$y+r \rightarrow x^r = x+r \rightarrow x^r - x - r = 0$
 $(x+1)(x-r)$

$x = -1$
 $x = r$

Subject

Date / /

بردار نرمال صفحه

برای آن

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{2x}{r}, 2y, 1 \right)$$

$$\chi(a, b, c) = \nabla f$$

$$a(x-x) + b(y-y) + c(z-z) = 0 \rightarrow \frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + 1(z-z) = 0 \quad (1)$$

بردار صفحه

$$\begin{cases} x = y = 0 \\ x = z = 0 \\ y = z = 0 \end{cases}$$

صفحات

$$\text{if } x = y = 0 \quad (1) \rightarrow \frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + (z-z) = 0$$

$$\rightarrow -\frac{x^2}{r} - 2y^2 + 2 - 2 = 0 \rightarrow 2 = \frac{x^2}{r} + 2y^2 + 2 = 12$$

$$\text{if } x = z = 0 \quad (1) \rightarrow$$

$$\frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + (z-z) = -\frac{x^2}{r} + 2yy - 2y^2 - 2 = 0$$

$$\rightarrow 4y^2 - 1 - 2 = -2yy \rightarrow y = \frac{2-1}{-2y}$$

$$\text{if } x = z = 0$$

$$\frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + (z-z) \rightarrow \frac{x}{r}x - \frac{x^2}{r} - 2y^2 - 2 = 0$$

$$x = \frac{1-2}{\frac{x}{r}}$$

$$\frac{1}{r}xyz = \frac{1}{r}x(1-2)\left(\frac{2-1}{2y}\right)\left(\frac{1-2}{\frac{x}{r}}\right)$$

$$F = \frac{1}{y} \cdot 1 - 2$$

$$2y + 3x + 2y \lambda_r = 0 \rightarrow \lambda_r = -\frac{r}{x}y - \frac{r}{y}x \lambda_r$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_r} = x^r + y^r - 1 = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{r}x - \frac{1}{r}x \lambda_r = -\frac{r}{x}y - \frac{r}{y}x \lambda_r \rightarrow \lambda_r \left(-\frac{1}{r}x + \frac{r}{y}x\right) = -\frac{r}{x}y + \frac{1}{r}x$$

$$\lambda_r = \frac{-\frac{r}{x}y + \frac{1}{r}x}{\left(-\frac{1}{r}x + \frac{r}{y}x\right)}$$

$$x = \pm \frac{r}{\delta}$$

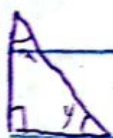
$$y = \pm \frac{r}{\delta}$$

$$2 = 4 - 4x - 3y \rightarrow 4 - 4\left(\frac{r}{\delta}\right) - 3\left(\frac{r}{\delta}\right) \rightarrow 4 - \frac{16}{\delta} - \frac{9}{\delta} \quad 4 - \delta = 1$$

$$x = -\frac{r}{\delta}, y = \frac{r}{\delta} \rightarrow x^2 + y^2 + 2^2 = \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + (1)^2 \quad \text{min} \quad 4 + \delta = 11$$

$$x^2 + y^2 + 2^2 = \left(-\frac{r}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + (11)^2 \quad \text{max}$$

فرض کنید x و y زوایای حاده‌ای در یک مثلث قائم الزامی باشند مطلوب است $\sin x \cdot \sin y$ Ex



$$x + y = 90^\circ$$

$$F = \sin x \cdot \sin y + \lambda(x + y - 90)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y + \lambda(1) = 0 \rightarrow \lambda = -\cos x \sin y \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos y \cdot \sin x + \lambda(1) = 0 \rightarrow \lambda = -\cos y \sin x \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 90 = 0$$

$$(1) = (2) \rightarrow -\cos x \sin y = -\cos y \sin x$$

$$\tan y = \tan x \rightarrow y = x = \frac{\pi}{4}$$

F سه تایی $Z = 4 - \frac{x^2}{r} - y^2$ فرض است نقطه P در این رویه چنان تعیین

شده که مجموع مساحت‌های مستطین‌ها و مساحت‌های مثلثات بهینه شود

$$2 - f + \frac{x^2}{r} + y^2 = 0$$

برای پیدا کردن نقاط استیلا، باید در بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ نقاطی را پیدا کنیم که فاصله آن‌ها از مرکز برابر باشد.

$$F = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda \frac{2x}{a^2} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{yz a^2}{2x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{xz b^2}{2y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda \frac{2z}{c^2} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{xy c^2}{2z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$(1) = (2) \rightarrow -\frac{yz a^2}{2x} = -\frac{xz b^2}{2y} \rightarrow y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b x}{a} \quad (4)$$

$$(2) = (3) \rightarrow -\frac{xz b^2}{2y} = -\frac{xy c^2}{2z} \rightarrow y^2 = \frac{z^2 b^2}{c^2} \Rightarrow y = \pm \frac{z b}{c} \quad (5)$$

$$(4) = (5) \rightarrow \frac{b x}{a} = \frac{z b}{c} \rightarrow z = \frac{c x}{a} \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b x}{a}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{c x}{a}\right)^2}{c^2} = 1$$

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = 1 \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$xyz = \frac{abc}{\sqrt{3}}$$

نقاط استیلا: $F = x^2 + y^2 + z^2$ را در بیضی $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ یا $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ پیدا می‌کنیم. $F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 (x^2 + y^2 + z^2 - 9)$

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 (x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

$$(1) \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x = 0$$

$$(2) \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda_1 = 0 \rightarrow z = -\frac{\lambda_1}{2}$$

$$(3) \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 0$$

$$(4) \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$(5) 2x + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{2x}{2} = -x$$

$$\begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix} P(x)$$

$$q(x) \leq b$$

$$x \geq 0$$

مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید.

همواره ضروریست که $\min$ و $\max$ را به درستی قرار دهیم و مقیدهای مسئله را بتوانیم به درستی به یکدیگر نسبت دهیم. اگر بتوانیم در هر دو سمت یک کارخانه را قرار دهیم یا کیفیت محصولات یکسان باشد.

$$F = P(x) + \lambda (q(x) - b)$$

برای حل چنین مسائل از توابع لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

پس با تغییر x و y به شرط $3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$F = xy^2 + \lambda (3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + \lambda (4x) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-y^2}{4x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda (2y) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-xz}{2y} \quad (2) \quad (y \neq 0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda (2z) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-xy}{2z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0 \rightarrow \quad (4)$$

$$(1) = (2) \rightarrow \frac{-y^2}{4x} = \frac{-xz}{2y} \rightarrow y^2 = 3x^2 \quad (5)$$

$$(3) = (2) \rightarrow \frac{-xy}{2z} = \frac{-xz}{2y} \rightarrow y^2 = z^2 \quad (6) \rightarrow 3x^2 = z^2$$

$$(4) \rightarrow 3x^2 + 3x^2 + 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow 9x^2 = 4 \rightarrow x = \pm \frac{2}{3}$$

$$y^2 = 3x^2 = 3\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{3} \rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$$

سم انتگرال دوگانه
اشکال دایره ای
Subject:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2x - 3y^2) dx dy$$

$$\left. x^2 - 3y^2 x \right|_{-1}^1 = (1 - 3y^2) - (-1 + 3y^2) = -4y^2$$

$$\int_{-1}^1 -4y^2 dy = -4 \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-1}^1 = -\frac{4}{3} (1 - (-1)) = -\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^1 dy \int_0^1 x^2 y e^{xy} dx$$

چون کران های ۲ اشکال محدودیت است پس در آن جای دیفرانسیل مراعات می دهیم تا از آن استفاده کنیم

$$\int_0^1 dx \int_{-1}^1 x^2 y e^{xy} dy$$

اشکال مستطیل

$$\begin{array}{r} +1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x^2 e^{xy} \\ x^2 e^{xy} \\ x^2 e^{xy} \end{array} \right.$$

$$\left. x y e^{xy} - e^{xy} \right|_0^1 = 1$$

$$= \left. x y e^{xy} - e^{xy} \right|_0^1 = x e^x - e^x - (0 - 1) \rightarrow \int_0^1 (x e^x - e^x + 1) dx$$

اشکال مستطیل

اشکال مستطیل

$$\begin{array}{r} +1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x^2 e^{xy} \\ x^2 e^{xy} \\ x^2 e^{xy} \end{array} \right.$$

$$\left(e^x - \frac{1}{x} e^x \right) - \frac{1}{x} e^x + 1 \Big|_0^1$$

$$\left(e - \frac{1}{1} e - \frac{1}{1} e + 1 \right) - \left(e - \frac{1}{1} e - \frac{1}{1} e \right)$$

$$\text{جواب نهایی}$$

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 x \cos(x^2 + y) dx dy$$

$$\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} dy \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x^2 + y) \right) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} [\sin y - \sin(\pi + y)] \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} [-\cos y + \cos(\pi + y)] \Big|_0^{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{-\cos \pi}{-1} + \frac{\cos 2\pi}{1} \right) - \left(\frac{-\cos 0}{-1} + \frac{\cos \pi}{-1} \right) \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} [2 - (-2)] = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

$$\int_0^1 \int_0^v \frac{1}{v} \left(v - \frac{1}{v} \right) \cos \frac{u}{v} \frac{u}{v} du dv = \int_0^1 dv \left(v \sin \left(\frac{u}{v} \right) \right) \Big|_0^v$$

$$= \int_0^1 v \sin 1 dv$$

Subject

Date 1 / 1 / 1401

$$Ax^2 - 2Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C = x^2 + 1$$

$$A + B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{-\frac{1}{x}}{-2A} + \frac{-\frac{1}{x}}{2B} + C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{x}}{x+2} dx + \int \frac{-\frac{1}{x} x + \frac{1}{x}}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{1}{x} \ln |x+2| + \dots$$

$$\int_0^1 dx \int_c^{1-x} \cos \left(\frac{x-y}{x+y} \right) dy$$

$$\frac{1}{x} \cos \left(\frac{u}{v} \right)$$

$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$J = \frac{1}{|J|} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{-u+v}{2} \end{cases}$$

$$y = -\frac{u+v}{2} \rightarrow y = -\frac{u+v}{2}$$

$$\text{if } x \geq 0 \rightarrow \frac{u+v}{2} \geq 0 \rightarrow u \geq -v$$

$$\text{if } x \leq 1 \rightarrow \frac{u+v}{2} \leq 1 \rightarrow u+v \leq 2$$

$$y \geq 0 \rightarrow -\frac{u+v}{2} \geq 0 \rightarrow u+v \leq 0$$

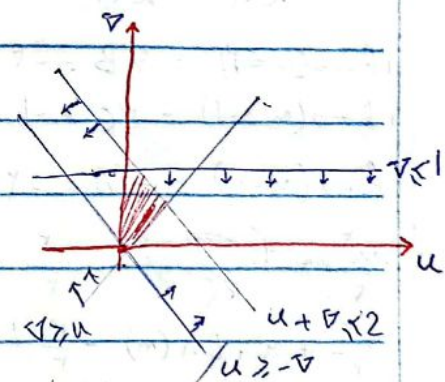
$$y \leq 1-x \rightarrow y+x \leq 1 \rightarrow v \leq 1$$

$$\int_0^1 du \int_u^{1-u} \frac{1}{v} \cos \left(\frac{u}{v} \right) dv$$

چون در فضای سه بعدی تکرار دارد پس فایده ندارد (برای اشتغال آن دشوار است) پس جای du را عرض می بیند

$$\int_0^1 dv \int_u^{1-u} \frac{1}{v} \cos \left(\frac{u}{v} \right) du$$

تست v



$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 - y^2) dx dy \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

شکل

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 y e^{xy} dx dy \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Kimia

Subject

Date / /

$$\begin{array}{|ccc|}
 \hline
 \cos \theta \sin \phi & -f \sin \theta \sin \phi & P \cos \theta \cos \phi \\
 \hline
 \sin \theta \sin \phi & P \cos \theta \sin \phi & f \sin \theta \cos \phi \\
 \hline
 \cos \phi & 0 & -f \sin \phi \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 3 \times 3
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{ماتریس}}
 \vec{f} = P^T \sin \phi$$

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

با دافوری انتقال میماند

Subject

Date / /

$$\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(-\frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} + c \right) dy dz =$$

$$\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(-\frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} + c \right) dy = \int_0^a dx \left[-\frac{cx^2}{2a} - \frac{cy^2}{2b} + cy \right]_0^{b(1-\frac{x}{a})}$$

$$\int_0^a dx \left[-\frac{cx^2}{2a} - \frac{c(b(1-\frac{x}{a}))^2}{2b} + c(b(1-\frac{x}{a})) \right]_0^b$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$z = 2$$



محتمات استوانه ای:

کف و سقف استوانه دایره به شعاع 'a' و ارتفاع استوانه عددی '2' دارند.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = 2$$

برای خواص از ژاکوبین استفاده کنیم (در تغییر مختصات - جدول)

	$\frac{\partial x}{\partial r}$	$\frac{\partial x}{\partial \theta}$	$\frac{\partial x}{\partial z}$		+	-	+
x	$\cos \theta$	$-r \sin \theta$	0				
y	$\sin \theta$	$r \cos \theta$	0				
z	0	0	1				

$$= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos \theta (r \cos \theta) + r \sin \theta (\sin \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$J =$$

	$\frac{\partial x}{\partial \rho}$	$\frac{\partial x}{\partial \theta}$	$\frac{\partial x}{\partial \phi}$
y	$\frac{\partial y}{\partial \rho}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta}$	$\frac{\partial y}{\partial \phi}$
z	$\frac{\partial z}{\partial \rho}$	$\frac{\partial z}{\partial \theta}$	$\frac{\partial z}{\partial \phi}$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} \frac{1}{r} dz$$

(where $\sqrt{1-r^2} = z$)

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2} dr$$

$\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{r} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$

$$x+y+z=1 \rightarrow z=1-x-y$$

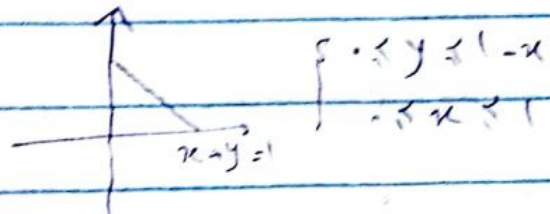
4/10

$$z=0$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$x+y=1 \rightarrow \text{if } y=0 \rightarrow x=1$$



$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) = \int_0^1 dx \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x}$$

$$\int_0^1 dx \left(1-x - \left(x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) \right)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} \Big|_0^1$$

$$\frac{z}{c} = -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1$$

5/10

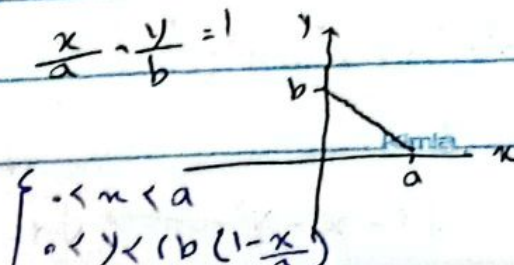
$$z = -\frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} + c$$

$$x=0 \quad y=0 \quad z=0$$

$$\text{if } y=0 \quad z=0 \rightarrow -\frac{cx}{a} + c = 0$$

$$x=a$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



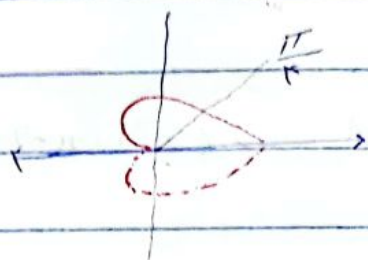
6

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ (همه محدود ریه‌های)

(4) $x + y + z = 1$ (همه محدود ریه‌های)

(5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (همه محدود ریه‌های)

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	1	0	1	0



$\theta \rightarrow$ تغییر یابد

انتقال رادر [آره] را حساب کرد و در 2 ضرب کنیم

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^1 dz$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^1 dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \left(2 \int_0^1 r^2 dr \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \left[\frac{2r^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\int x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \\ (1) & \rightarrow z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 2$$

$$(1) \rightarrow z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

$$(2) \rightarrow z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \rightarrow \sqrt{2 - r^2}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Subject

Date / /

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \rightarrow -\frac{1}{2} (e^{-\infty} - e^0)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{1} \right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow I = \frac{\pi}{2} \rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

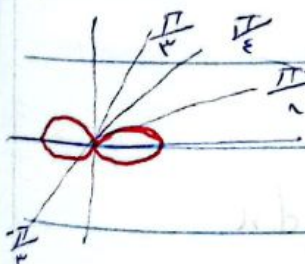
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

مساحت محدود به منحنی

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{(r^2)^2} \Rightarrow r^4$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^4 \rightarrow r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^4$$

$$(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2 \rightarrow r^2 = \cos 2\theta \rightarrow r = \sqrt{\cos 2\theta}$$



θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

نصف استار د تا $\frac{\pi}{4}$ انتشار الی رافصا سیه کرده در ۴ ضرب بین

$$4 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr$$

$$r = 1 + \cos \theta$$

۱) مساحت محدود

۲) حجم محدود از بالای $z = x^2 + y^2$ و از تار به استوانه
 $z = x^2 + y^2$ و از تار به استوانه
 $z = 2$

$\iiint dx dy dz =$

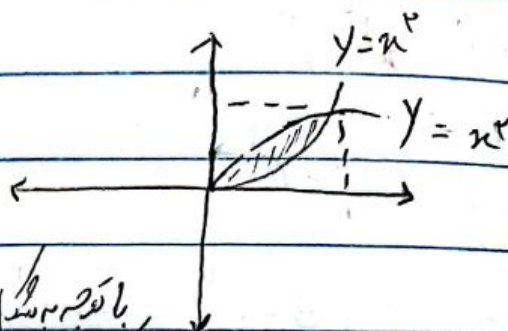
① $z = x^r + f y^r \quad 0 \leq z \leq x^r + f y^r$

$\int y^r = x \xrightarrow{\text{با } x \text{ ضرب و } y^r \text{ باقی بماند}} (x^r)^r = x \rightarrow x^f = x \rightarrow x^f - x = 0$
 $y = x^r \xrightarrow{\text{با } x^r \text{ ضرب}} x(x^r - 1) = 0$
 $\rightarrow x = 1$

$z = 0$

$(x^r - 1) = (x - 1)(x^r + x + 1)$

$\rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$



$V = \int_0^1 dx \int_{x^r}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x^r + f y^r} dz$

$\int_0^1 dx \int_{x^r}^{\sqrt{x}} (x^r + f y^r) dy$

$= \int_0^1 dx \left(x^r (\sqrt{x}) + \frac{f (\sqrt{x})^r}{r} \right) - \left(x^r (x^r) + \frac{f (x^r)^r}{r} \right) dx$

$I = \int_0^\infty e^{-x^r} dx$

$I^r = I \times I = \left(\int_0^\infty e^{-x^r} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^r} dy \right)$

$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y^r} dx dy$

از قفسه

$x) \rightarrow (C \cdot \sin \theta) \rightarrow C \cdot \sin \theta$

$y) \rightarrow C \cdot \cos \theta$

$\rightarrow C \cdot \cos \theta$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$

حجم (۶۰)

همانطور که دایره از تقاطع دو دایره نفاذ مسافت بین ۲ نقطه می باشد. $\int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy$

$$\int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy \int_{g_2(x,y)}^{g_1(x,y)} dz$$

اما حجم مربوط به انتگرال سه گانه می باشد. در انتگرال سه گانه اگر بتوان شکل را رسم کرد، در غیر این صورت از اطلاعات و شکل کمک می گیریم. حاصل تداخل (کران ها) را به دست می آوریم.

$$E_k: \text{حجم محدود بر روی} \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z \\ x^2 + y^2 = 4y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$① \rightarrow z = \frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{r^2}{4} \rightarrow 0 \leq z < \frac{r^2}{4}$$

$$② \rightarrow x^2 + y^2 = 4y$$

چون سمت چپ تساوی مثبت است پس سمت راست نیز مثبت است.

$$4y \geq 0 \rightarrow 4r \sin \theta \geq 0 \rightarrow \sin \theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$③ \rightarrow x^2 + y^2 = 4y \rightarrow r^2 = 4r \sin \theta$$

$$\rightarrow r(r - 4 \sin \theta) = 0$$

$$\text{بر } r=0 \rightarrow r = 4 \sin \theta \rightarrow \frac{r^2}{4} = 0 \rightarrow \frac{r^2}{4} = 4r = \frac{r^2}{4}$$

$$V = \int_0^\pi d\theta \int_0^{4 \sin \theta} r dr \int_0^{\frac{r^2}{4}} dz$$

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{4 \sin \theta} \frac{r^2}{4} dr = \int_0^\pi \frac{1}{12} \sin^3 \theta d\theta$$

E_m : حجم محدود بر کره شعاع a و استوانه $r^2 = a^2$ را به دست می آوریم.

$$\text{hit } x^2 + y^2 + z^2 = (ra)^2 \rightarrow z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ r^2 = a^2 \rightarrow x^2 + y^2 = a^2 = \pm \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\text{if } x = \sqrt{r} \cos \theta, y = \sqrt{r} \sin \theta \rightarrow r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. @ $\theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

2. @ $\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r \ln r \, dr$$

$$\int \ln r = u \quad \int \frac{1}{r} dr = du$$

$$r dr = du$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} r \ln r \, dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{r} \right) dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}}$$

ب) $\iint \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \iint \sqrt{u^2 + v^2} \, du \, dv$

hit $\sqrt{x} = u \rightarrow x = u^2$
 $\sqrt{y} = v \rightarrow y = v^2$

$u = r \cos \theta$
 $v = r \sin \theta$

$$\iint \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{1}{4} u^2 v^2 \, du \, dv = \iint r \cdot \frac{1}{4} (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^2 \, r \, dr \, d\theta$$

$$\iint \frac{1}{4} r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^5 \, dr$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \rightarrow \frac{1}{4} \sin^2 \theta = \frac{1}{4} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 \theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \left[\sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] d\theta = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta + \frac{\cos^5 \theta}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Subject

Date

$$\int_0^1 \left(\frac{-1}{\sqrt{x}} \right) \cos\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \bigg|_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 -\sqrt{x} [\cos 1 - \cos \sqrt{x}] dx$$

$$= \int_0^1 -\sqrt{x} \cos 1 + \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$$

$\int_0^1 -x^{\frac{1}{2}} \cos 1 dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \cos \sqrt{x} dx$

$\frac{-x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \cos 1 \bigg|_0^1$

$\sqrt{x} = u \rightarrow x = u^2$
 $dx = 2u du$

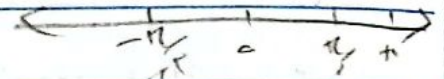
$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^1 u \cos u (2u du) = \int_0^1 2u^2 \cos u du$$

Integration by parts

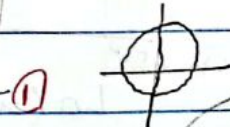
$$\begin{array}{l} + 2u^2 \cos u \\ - 4u \sin u \\ + 2 \cos u \\ - 0 \sin u \end{array} \rightarrow 2u^2 \sin u + 4u \cos u - 2 \sin u \bigg|_0^1$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ dx dy = r dr d\theta \end{cases}$$



$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \sqrt{3} & \rightarrow r \cos \theta \geq 0 \rightarrow \cos \theta \geq 0 \\ & \rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (1) \\ x \leq \sqrt{3} & \rightarrow r \cos \theta \leq \sqrt{3} \rightarrow r \leq \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq \sqrt{3-x} & \rightarrow r \sin \theta \geq 0 \rightarrow \sin \theta \geq 0 \\ & \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi \\ y \leq \sqrt{3-x} & \rightarrow \frac{y}{x} \leq \sqrt{3} \rightarrow \tan \theta \leq \sqrt{3} \rightarrow \theta \leq \arctan \sqrt{3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Region (1)} \rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\cos \theta}} \frac{1}{r} r dr d\theta$$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} - 0 d\theta = \sqrt{3} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\iint (x^2 - y^2) dx dy$$

$$x - y = \pm 1$$

$$x + y = \pm 1$$

$$x + y = u \rightarrow u = \pm 1$$

$$x - y = v \rightarrow v = \pm 1$$

$$dx dy = \frac{du dv}{2}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

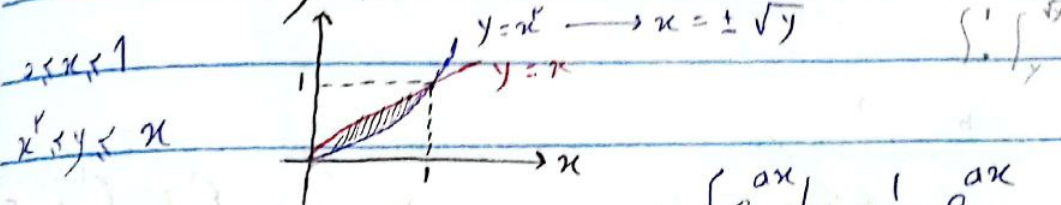
$$\Rightarrow J = \frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$$

Ex. $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} dy dx$

در انتگرال میانه به تغییر متغیر داریم در دو حالت تغییر متغیر.

حالت اول: چون لا در فرج سراسر است [انتگرال] داخله نسبت به y است. پس انتگرال گیری

دستوار است. جای دین اسیل ها [بارس اسل] عوض حرکت کنیم.



$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$

$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} dx$

$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} \Big|_y^{\sqrt{y}} = \sqrt{y} (e' - e^{\sqrt{y}})$

$\int_0^1 \sqrt{y} (e' - e^{\sqrt{y}}) dy = \int_0^1 \sqrt{y} e' dy - \int_0^1 \sqrt{y} e^{\sqrt{y}} dy$

$\sqrt{y}=u \rightarrow y=u^2$
 $dy=2u du$

$\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} u e^u (2u du)$

$= e' \left(\frac{2}{3} \right) (1-0) - \int_0^1 2u^2 e^u du$

انتگرال مشتق

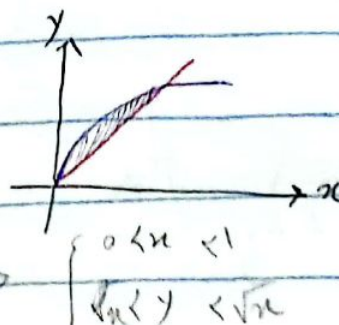
$+2u^2$	e^u
$-4u$	e^u
$+4$	e^u
0	e^u

جواب انتگرال دو

$2u^2 e^u - 4u e^u + 4e^u \Big|_0^1$

Ex. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \sin\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) dx dy$

$0 \leq y \leq 1$
 $y^2 \leq x \leq y \rightarrow \begin{cases} x=y^2 \rightarrow y=\sqrt{x} \\ x=y \end{cases}$



$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) dy$

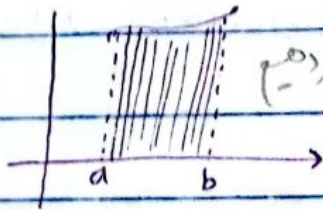
$a = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

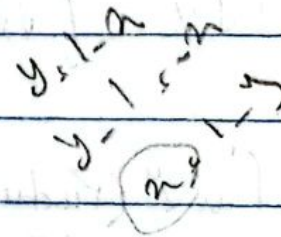
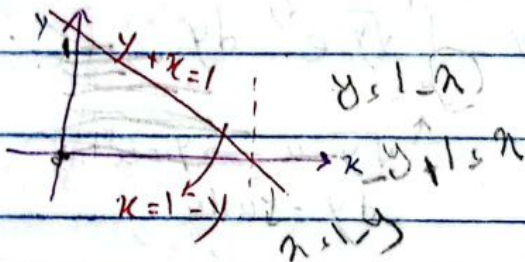
انتقال:

$$\int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

جای x و b قرار دهیمEx. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy$ (جای دیفرانسیل ها را تعریف کنید)

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1-x \end{matrix} \rightarrow y = 1-x \rightarrow y+x=1 \quad \begin{matrix} y \\ x \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\int_0^1 (1-y) dy = y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$\int_0^1 \int_x^1 dy dx = ? \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ x^2 < y < x \end{matrix}$$

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx$$

$$y = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy$$

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx$$

