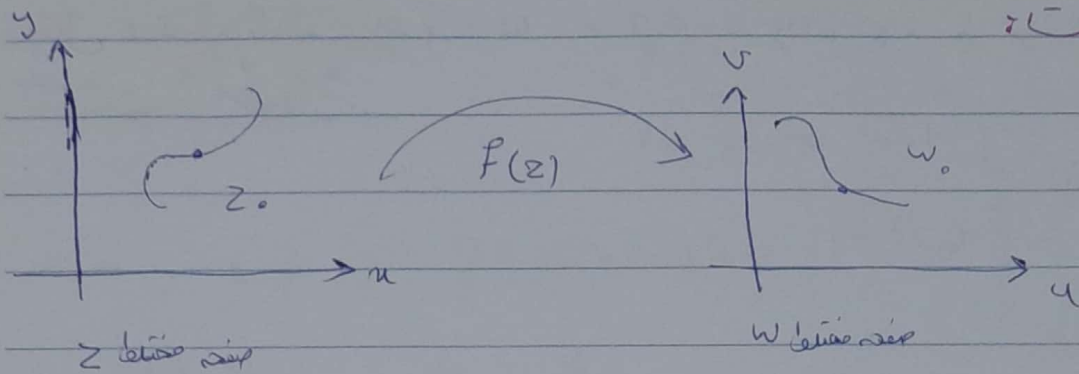




$$\begin{cases} a \rightsquigarrow a + ja' \\ c \rightsquigarrow c + jc' \end{cases}$$

$$w = az + b$$

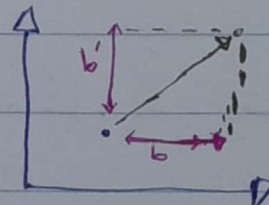
$$a \rightarrow \{ w = z + b \} \text{ هم}$$

الف: خطی نگاشت:

ب: نگاشت انتقال:

$$u + jv = (x + jy) + (b + jb')$$

$$\Rightarrow (x + b) + j(y + b')$$



$$\{ z = re^{j\theta} \}$$

نقطه

$$w = az \Rightarrow |a| e^{j\phi} \cdot r e^{j\theta} = |a| r e^{j(\phi+\theta)}$$

نقطه

نقطه: $w = az$ ϕ θ $\phi + \theta$

اندازه، $|a|$ برابر می‌کند $\leftarrow$ تغییر مقیاس

زاویه حول مبدأ ϕ دوران می‌کند $\leftarrow$ تغییر زاویه

$$\{ w = az \Rightarrow r |a| e^{j(\phi+\theta)} \}$$

هم

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Wed Fri

Subject:

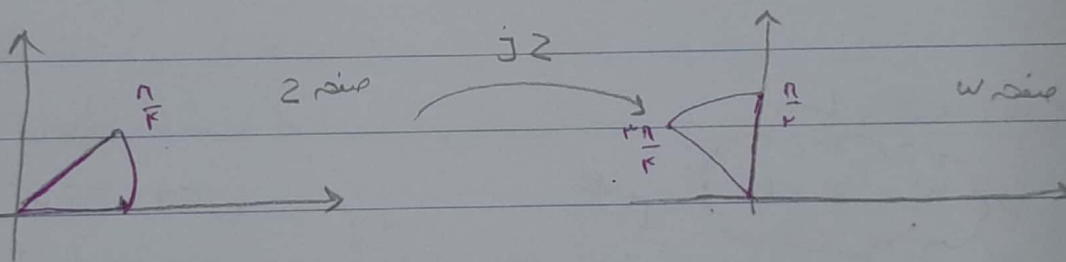
مثال: تحت نگاشت $w = z$ ، $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ چه می شود؟
نگاشت دوران است.

$$z = 0 + 1j \quad \begin{cases} \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1^2} = 1 \\ \tan^{-1}(\frac{1}{0}) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

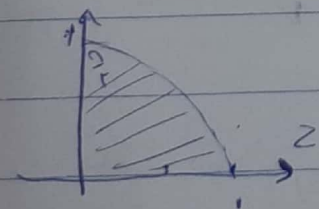
$$0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow w = e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot r e^{j\theta} = r e^{j(\frac{\pi}{4} + \theta)}$$

که اگر r را تغییر ندهیم
تو همان تغییر می دهیم

$$0 + \frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \frac{\pi}{2}$$



مثال: تحت نگاشت $w = (1+z)z$ ، مثل زیر چه می شود؟
مثال دوران



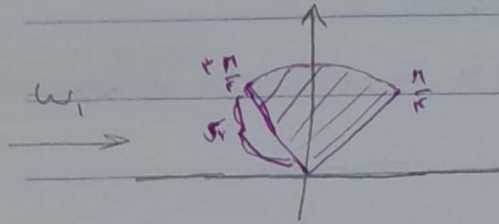
$$w: (1+z)z = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot r e^{j\theta} = r\sqrt{2} e^{j(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$\begin{cases} \text{از این } \Rightarrow \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Date: / /

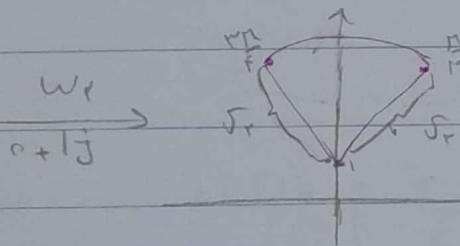
Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----



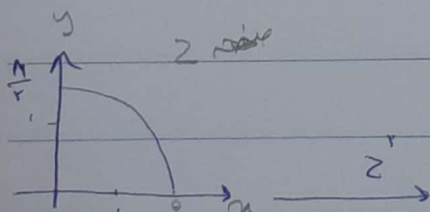
$$0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{r} \rightarrow \frac{\pi}{r} \leq \arg w_1 \leq \frac{r\pi}{r}$$

$$w_1 \text{ نداشت: } 0 + 1j$$

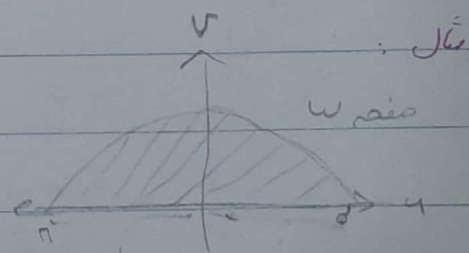


$$w = z^n = (re^{j\theta})^n = r^n e^{jn\theta}$$

نمایش z^n :
 اندازه توان n می شود
 زاویه n برابر می شود



$$w = z^r = (re^{j\theta})^r = r^r e^{jr\theta}$$



$$0 \leq \arg w \leq \pi$$

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$$

$$\frac{1}{z}$$

اندازه $\frac{1}{r}$
 زاویه منفی می شود

نکته: می توان تمام خطوط (دایره ها) در z تبدیل به دایره ها (خطوط) در w

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Wed Fri

Subject: -----

$$A(m' + y') + Bm + Cy + D = 0$$

حالت کلی معادله دایره در صفحه Z

$$z = m + jy, \quad \bar{z} = m - jy$$

$$z\bar{z} = (m + jy) \cdot (m - jy) = m^2 + y^2 - jy^2 + jmy = m^2 + y^2 \quad *$$

$$z + \bar{z} = m + jy + m - jy = 2m \Rightarrow m = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad **$$

$$z - \bar{z} = m + jy - m + jy = 2jy \Rightarrow y = \frac{z - \bar{z}}{2j} \quad ***$$

در این روش، در معادله دایره، نوسان مثبت و منفی

$$\Rightarrow A(z\bar{z}) + B\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + C\left(\frac{z - \bar{z}}{2j}\right) + D = 0$$

طریقی، ابتدا (w) و سپس:

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{w}$$

$$\bar{w} = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$$

$$z + \bar{z} = \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} = \frac{w + \bar{w}}{w\bar{w}}$$

$$z - \bar{z} = \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{w} - w}{w\bar{w}}$$

$$\rightarrow A\left(\frac{1}{w\bar{w}}\right)(w\bar{w}) + B\left(\frac{w + \bar{w}}{2w\bar{w}}\right)(w\bar{w}) + C\left(\frac{\bar{w} - w}{2jw\bar{w}}\right)(w\bar{w})$$

$$+ D(w\bar{w}) = 0 \Rightarrow A + B\left(\frac{w + \bar{w}}{2}\right) + C\left(\frac{\bar{w} - w}{2j}\right) + D(w\bar{w})$$

$$w = u + jv$$

$$\bar{w} = u - jv$$

$$\rightarrow A + Bu + Cv + D(u^2 + v^2)$$

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Wed Fri

Subject: _____

$$*: w + \bar{w} = 2u \quad \text{و} \quad \bar{w} - w = 2vj \quad \quad w \bar{w} = u^2 + v^2$$

$$A + Bu + Cv + D(u^2 + v^2) \xrightarrow{\text{م حالت دایره}}$$

و D : دایره صفت 2 خط صفت 2

A = 0 : خط صفت 2 دایره صفت w

و A = D : سری خطوط در صفت 2 به سری خطوط در صفت w تبدیل می شود

$$|r| > 1$$

افشایی

$$|r| < 1$$

افشایی

0

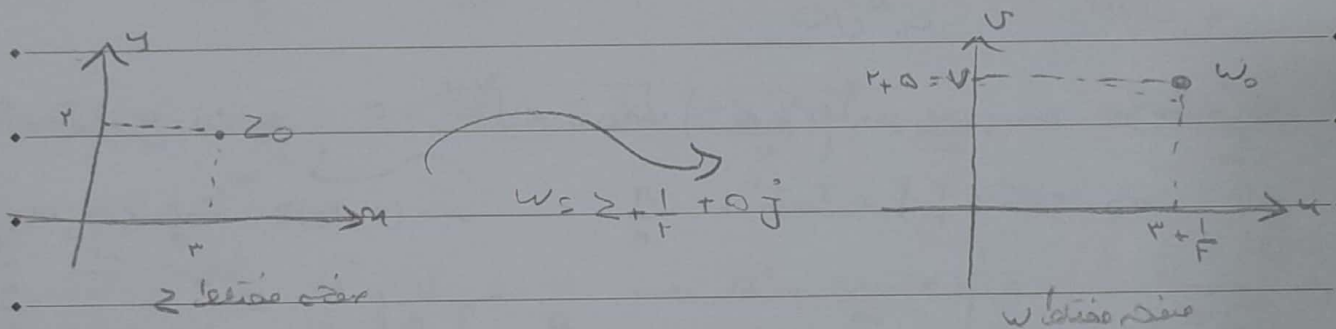
به نقطه لون دوران دایره دوران

مثال: نمایش انتقال $w = z + a$

مختلط مختلط

مثال: تصویر نقطه $z = 3 + 2j$ در صفحه z تحت نمایش $w = z + \frac{1}{r} + aj$ بیاید.

$$w = u + vj = x + yj + \frac{1}{r} + aj = \left(x + \frac{1}{r}\right) + (y + a)j$$



مثال: نمایش همراهِ $w = az$

مختلط

مثال: در صفحه z $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \pi$ اندازه z برابر ۲ تحت نمایش

$$z = \frac{(1+j)}{a} \quad w = az$$

$$\text{اندازه} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{زاویه} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

اندازه در صفحه w $\sqrt{2}$ برابر می شود، زاویه $\frac{\pi}{4}$ اندازه $\frac{\pi}{4}$ دوران می کند.

$$\text{تصویر در صفحه} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \leq \arg w \leq \pi + \frac{\pi}{4}, \quad \text{اندازه} = 2\sqrt{2}$$

$$a + bi \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{مختلط} & \text{مختلط} \end{matrix}$$

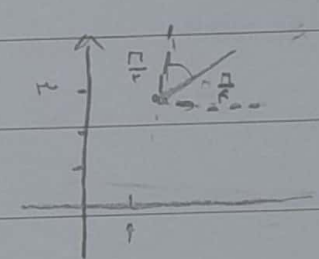
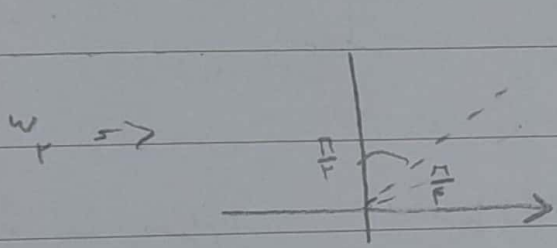
تفاوت دو عدد مختلط

مثال: تصویر z که $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$ باشد، تحت توان w بیاید.

$$w = \underbrace{(2+2j)}_{w_1} z + \underbrace{(1+j)}_{w_2}$$

$w_1 \Rightarrow$ اندازه $\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\arg w_1 = \frac{\pi}{4}$

$w_2 \Rightarrow \tan^{-1}(\frac{1}{1}) = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ $w_2 = (1+j)z = \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$



z^n تحت توان

حداکثر، حداقل، ...

مثال: تصویر z که $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$ باشد، تحت توان w بیاید.

$$z = r e^{j\theta} = r e^{j\theta} \quad \begin{cases} (\sqrt{2})^n \\ 0 \leq \arg w \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$w = \frac{1}{z}$ تفاوت دو عدد مختلط

تصویر z که $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$ باشد، تحت توان w بیاید.

$$w = \frac{1}{z} \Rightarrow u + vj = \frac{1}{x + yj} \xrightarrow{\times \frac{a}{a}} \frac{1}{a + yj} \xrightarrow{\times \frac{a - yj}{a - yj}} \frac{a - yj}{a^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} u = \frac{a}{a^2 + y^2} \\ v = \frac{-y}{a^2 + y^2} \end{cases} \xrightarrow[\text{چون در مخرج است}]{\text{مخرج در مخرج w}} \begin{cases} a^2 + y^2 = \frac{a}{u} \\ v \cdot \frac{-y}{a} = \frac{uy}{-a} \rightarrow y = -\frac{av}{u} \end{cases}$$

$$a^2 + y^2 = \frac{a}{u} \quad y = -\frac{av}{u} \rightarrow a^2 + \left(-\frac{av}{u}\right)^2 = \frac{a}{u} \rightarrow a^2 + \frac{a^2 v^2}{u^2} = \frac{a}{u}$$

$$\frac{u^2}{a^2} \xrightarrow{\text{ضرب در } a^2} u^2 + v^2 = \frac{u}{a} \rightarrow u^2 - \frac{u}{a} + v^2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{مربع کامل}} \left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4a^2}$$

مربع کامل کردن
مربع چهارم

$$\left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4a^2}$$

$$\rightarrow \left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4a^2}$$

$$\frac{1}{2a} \quad \frac{1}{2a} \quad \text{دایره با مبدأ و شعاع } \frac{1}{2a}$$

$$e^z \quad \text{نشانه } z$$

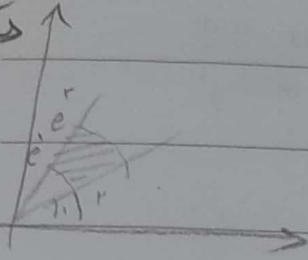
$$w = e^z = e^{x + jy} = e^x \cdot e^{jy} = R e^{j\theta}$$

$$R = e^x \quad \text{زاویه } y$$

$$\text{مثال: تصویر شکل زیر تحت نشانه } e^z \text{ چیست؟}$$

$$e^z \quad |x| < \infty \rightarrow e^x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x \in \mathbb{R}$$

$$e^z \quad |y| < \infty \rightarrow e^{jy} \in \mathbb{C} \rightarrow e^{jy} \in \mathbb{C} \rightarrow e^{jy} \in \mathbb{C} \rightarrow e^{jy} \in \mathbb{C}$$



معادلات دیراکل با مشتقات جزئی :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

معادله موج در یک بعد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

معادله حرارت در یک بعد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

معادله پواسون در دو بعد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

معادله لاپلاس در سه بعد

* نکته: معادله شامل مشتقات تابع مجهول وجود داشته باشد

خفیه بودن

سؤال: تابعی که معادله دیفرانسیل زیر، از u یا m به دست آورده.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial m \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad p = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$p_m - p = 0 \Rightarrow \frac{p_m}{p} = 1$$

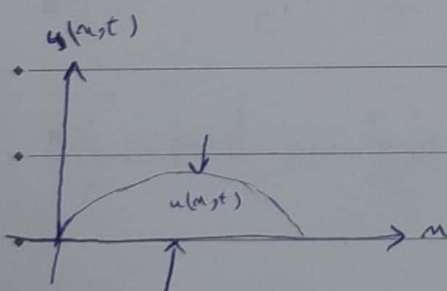
انتگرال $\Rightarrow \ln p = m + A(y) \Rightarrow p = e^{m+A(y)}$

$A(y)$ و $e^{m+A(y)}$ تابع دلخواه از y است:

$$p = \frac{\partial u}{\partial y} = B(y) e^m$$

انتگرال نسبت به y $\Rightarrow u(m, y) = e^m f(y) + g(m)$

$f(y)$ و $g(m)$ توابع دلخواه از y و m می باشد.



معر

معادله تار مرتعش معادل معادله موج در یک بعد است

در یک معادله موج در یک بعد که حرکت می کند

روش جدا سازی متغیرها:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial m^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad 0 < m < L, t > 0$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{شرایط مرزی}$$

$$u(m, 0) = f(m) \quad \text{حالت اولی}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(m) \quad \text{سرعت اولی} \quad \left. \begin{array}{l} \text{شرایط اولیه} \end{array} \right\}$$

$$u(m, t) = X(m) T(t) \Rightarrow X''(m) T(t) - \frac{1}{c^2} T''(t) X(m) = 0$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \text{ثابت} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{صفر} \\ \text{مثبت} \\ \text{منفی} \end{array} \right.$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = +k^2 \quad (\text{مثبت}) \quad \text{حالت اول مثبت}$$

$$X'' - k^2 X = 0 \xrightarrow{\text{حل با جداسازی}} X(m) = A e^{+km} + B e^{-km}$$

$$u(m, t) = X(m) T(t) \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} u(0, t) = X(0) T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(L, t) = X(L) T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$$

$$\text{چون } T(t) \text{ نقیصه نمیباشد چون معادله تار در تقاطع است پس } X \text{ میزبان}$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow A e^{kL} + B e^{-kL} = 0 \Rightarrow A = B = 0$$

$$\text{همه وقت به } X(m) \text{ جواب مناسب نیست}$$

$$\text{حالت دوم منفی}$$

$$u(m, t) = X(m) T(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \text{ثابت}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -k^2$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{C^2} \frac{T''}{T} = \dots$$

$$X'' = 0 \Rightarrow X(n) = An + B$$

$$u(n, t) = X(n) T(t)$$

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(L, t) = X(L) T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$$

$$X(n) = 0$$

در صورتی که $X(n) = 0$ در $n=0$ و $n=L$ باشد، داریم:

$$u(n, t) = X(n) T(t)$$

$$X''(n) T(t) = \frac{1}{C^2} T''(t) X(n)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{C^2} \frac{T''}{T} \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{C^2} \frac{T''}{T} = -k^2$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{C^2} \frac{T''}{T} = -k^2$$

$$X'' + k^2 X = 0 \Rightarrow X(n) = A \cos kn + B \sin kn$$

$$u(n, t) = X(n) T(t)$$

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u(L, t) = X(L) T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X(n) = B \sin kn$$

$$X(L) = 0 \rightarrow B \sin kL = 0 \rightarrow kL = n\pi$$

$$X(n) = B \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

لذا نوشتن

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -k^2 \Rightarrow T'' + k^2 c^2 T = 0$$

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi c}{L} \right)$$

$$T_n''(t) = -\lambda_n^2 T_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$T_n(t) = C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t, \quad n = 1, 2, \dots$$

جوابی
و مقادیر

$$u_n(x, t) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x (C_n \cos \lambda_n t + D_n \sin \lambda_n t)$$

$$u_n(x, t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = D_n \times B_n \quad \text{و} \quad a_n = C_n \times B_n$$

مقادیر

معمولی

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

معمولی

$$t=0 \Rightarrow u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad 0 < x < L$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{L} \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$