

Date:

Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: فصل جدید

دسته معادلات غیر خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

دسته خطی $A_{m \times n} X_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ را می توانیم بنویسیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

برای حل اینگونه دستگاه ها، از روش های مختلفی می توان استفاده کرد (که به صورت بلافاصله یا

پایین فعلی درم آوریم) برای حل کافی است $[A|b]$ ماتریس افزوده را با اعمال سطرییکسانی به صورت بلافاصله در آوریم و در نهایت x ها به راحتی به دست می آیندNote: فرض کنید x و y با لاتاناز $\sin x, \cos x, \tan x, \ln x, \dots$

$$x^2 + 5 \sin^2 xy + y^2 - 2 = 0$$

را می توانیم بنویسیم

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

که دستگاه را می توان به ۲ معادله غیر خطی است که به روش های مختلف می توانیم حل کنیم NR و نقطه ثابت و ...

تایم حل است

روش نقطه ثابت

در روش غیر خطی (یا صاف یا کمانه عددی) این روش برای پیدا کردن ریشه $f(x) = 0$ که به دست

$$f(x) = x^5 + x^3 + \frac{1}{x} = 0$$

می خواهیم ریشه این تابع را بدست آوریم

$$|g'| < 1, x \in [a, b]$$

اگر $f(x) = g(x) - x$ معادله به صورتی که

$$g'(x) = \frac{5x^4 + 3x^2}{(x^5 + x^3)^2}$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$|g'| < 1 \quad \frac{x^5 + x^3}{x} = -\frac{1}{x}$$

$$g(1) = 1 + 1 + 1 = 3 > 0$$

$$x = -\frac{1}{x^5 + x^3} = g(x)$$

$$g(-1) = -1 - 1 - 1 = -3 < 0$$

$$g(1) \cdot g(-1) < 0$$

$$[-1, 1] - \{0\}$$

$$g'(x) = \frac{5(x^5 + x^3) - (5x^4 + 3x^2)(-1)}{(x^5 + x^3)^2}$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: _____

note: برای حل دستگاه معادلات، دایره نیازی به محاسبه نیست

Ex: بر روش نقطه ثابت

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1.0x + 1 = 0 \\ x + xy^2 - 1.0y + 1 = 0 \end{cases}$$

($x_0 = 0.5$ و $y_0 = 0.5$) جواب اول، $\epsilon = 10^{-3}$

حالت ①

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.1x_n^2 + 0.1y_n^2 + 1 \\ y_{n+1} = 0.1x_n + 0.1x_n y_n^2 + 1 \end{cases}$$

مرحله اول

$$\begin{cases} x_1 = 0.1(0.5)^2 + 0.1(0.5)^2 + 1 = 0.185 \\ y_1 = 0.1(0.5) + 0.1(0.5)(0.5)^2 + 1 = 0.18425 \end{cases}$$

مرحله دوم

$$\begin{cases} x_2 = 0.1(0.185)^2 + 0.1(0.18425)^2 + 1 = 0.95444 \\ y_2 = 0.1(0.185) + 0.1(0.185)(0.18425)^2 + 1 = 0.95823 \end{cases}$$

تا زمانی که ادامه می دهیم

$$|y_{n+1} - y_n| < \epsilon \quad , \quad |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

	x_n	y_n	جواب واقعی
۳	۰/۹۷۹۵۳	۰/۹۷۹۷۸	$x=1$ $y=1$
۴	۰/۹۹۱۹۴	۰/۹۹۱۹۸	
۵	۰/۹۹۴۸۰	۰/۹۹۴۸۱	$ x_5 - x_4 < \epsilon$ $ y_5 - y_4 < \epsilon$
۶	۰/۹۹۸۷۲	۰/۹۹۸۷۲	
۷	۰/۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۴۹	

□

روش نیوتون، افشون برای حل دستگاه غیر خطی

روش نیوتون NR برای پیدا کردن ریشه $f(x)=0$ به این صورت است

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

کافی است

در موارد ۳ بعدی

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

برای حل دستگاه

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \\ h(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ xyz = 1 \\ x + y - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 = 2.5 \\ y_0 = 1.5 \\ z_0 = 1.5 \end{bmatrix}$$

Ex به روش NR

↓

$$\begin{cases} f: x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ g: xyz - 1 = 0 \\ h: x + y - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \frac{\text{مقدار عددی}}{\text{مقدار عددی}}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & -2z \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ماتریس هسسی خارج کسر}} \begin{bmatrix} 5 & 1.5 & 3 \\ 1.475 & 1.125 & 1.425 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2.5)^2 + (1.5)^2 + (1.5)^2 - 9 = 1.475 \\ (2.5) \cdot (1.5) \cdot (1.5) - 1 = -0.125 \\ 2.5 + 1.5 - (1.5)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2.4919 \\ y_1 = 0.12407 \\ z_1 = 1.4409 \end{cases}$$

در جدول NR نشان

Date:

$$\begin{cases} x_r = 1.14232 \\ y_r = 0.14232 \\ z_r = 1.14232 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_r = 1.14232 \\ y_r = 0.14232 \\ z_r = 1.14232 \end{cases}$$

$$\epsilon = 10^{-4}$$

$$|x_r - x_r| < \epsilon$$

$$|y_r - y_r| < \epsilon$$

$$|z_r - z_r| < \epsilon$$

□

$$\begin{cases} x^r + y^r - r = 0 \\ e^x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -r \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

$$\delta NR \text{ Case } r: \epsilon \propto \epsilon = 10^{-4}$$

$$\begin{cases} f = x^r + y^r - r \\ g = e^x - y - 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} r x & r y \\ e^x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & -r \\ e^{-r} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = ((-r)(-1)) - ((-r)(e^{-r})) = r + r e^{-r} > 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{r + r e^{-r}} \begin{bmatrix} -1 & +r \\ -e^{-r} & -r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-r} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -r & -r \\ e^{-r} & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -r \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{r + r e^{-r}} \begin{bmatrix} -1 & +r \\ -e^{-r} & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.14232 \\ -0.14232 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_r = -1.14232 \\ y_r = -0.14232 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_r = -1.14232 \\ y_r = -0.14232 \end{cases}$$

مروری بر حسابان

فرض کنید $f(x)$ و مشتق های آن تا مرتبه $n+1$ بر $[a, b]$ پیوسته باشند و $x_0 \in [a, b]$

$f(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\text{چند جمله ای / سری تیلور}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{غلط}}$

$\zeta(x) \leq x$ و x_0 وجود دارد که $\zeta(x)$ تابعی به حسب x

سری تیلور حول نقطه x_0

$$① P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^1}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

یا $x=0$ باشد. فرمول D سری تک لایه تابع $f(x)$ را می دهد

Ex: سری تیلور $f(x) = \arctg x$ حول $x = \frac{1}{4}$ ؟

$$f(x) = \arctg\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{17}{16}} = \frac{16}{17}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 2x(1)}{(1+x^2)^2} \rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-2\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{17}{16}\right)^2} = -\frac{16}{3(17)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = f'''(x) = \frac{-2(1+x^2) - 2(2x)(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^3}$$

$$P_n(x) = \arctg\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)}{1!} \left(\frac{16}{17}\right) + \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{2!} \left(-\frac{16}{3(17)^2}\right) + \dots$$

$$+ \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^3}{3! \left(17\right)^3} + \dots$$



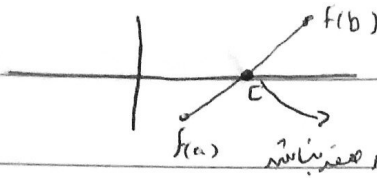
Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

قضیه: مقدارهایی برای تابع پیوسته: فرض کنید $f(n)$ بر $[a, b]$ پیوسته و K عددی باشد که

$$f(a) < K < f(b) \quad \text{آن گاه عددی مانند } C \in (a, b) \text{ موجود است که } f(C) = K$$



به عنوان مثال شکل را در نظر بگیرید:

$$f(C) = K \quad \text{که در این شکل } K = 0 \quad \text{میانگین دو نقطه ای را می بینیم}$$

حالت خاص قضیه میانی و اگر $f(a) < 0 < f(b)$ آن گاه $C \in (a, b)$ می وجود دارد

$$f(C) = 0$$

قضیه رول: اگر تابع $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b)$

$$\text{آن گاه عددی مانند } C \in (a, b) \text{ موجود است که } f'(C) = 0$$

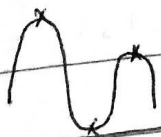
قضیه مقدار متوسط: اگر $f(n)$ بر $[a, b]$ مشتق پذیر آن گاه عددی مانند $C \in (a, b)$ است که

$$\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} = f'(C) \quad \leftarrow \quad f(b) - f(a) = (b-a) f'(C)$$

قضیه مقدار اکسترمم: اگر $f(n)$ بر $[a, b]$ پیوسته آن گاه $\alpha, \beta \in [a, b]$ وجود دارند که $f(\alpha) \leq f(n) \leq f(\beta)$ و $\forall x \in [a, b]$

بنا بر α و β در نقاط انتهایی یا در صورتی که f بر (a, b) مشتق پذیر باشد جای هستند $f'(n) = 0$

Local اکسترمم محلی (نسبی)



Global اکسترمم حلقه (در سراسر)

نماد O بزرگ: اگر $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشند که برای x ها به قدر کافی بزرگ بتوانیم مقایسه می کنیم وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $f(n)$ از مرتبه $g(n)$ است یا $f(n) = O(g(n))$ بزرگ $g(n)$ را می نویسیم

$$f(n) = O(g(n))$$

Date: / /

Sat.	Sun.	Mon.	Tue.	Thu.	Wed.	Fri.
------	------	------	------	------	------	------

Subject: -----

هر دو اعداد حقیقی x و M وجود داشته باشد که $\forall n \geq n_0$ $|f(n)| \leq M |g(n)|$

یا $f(n) = O(g(n))$ برای $x > 1$ $\left\{ \begin{array}{l} f(n) = 4n^4 - 2n^3 + 2 \\ g(n) = n^4 \end{array} \right. \quad Ex$

$$1 < n \Rightarrow |n^3| \leq |n^4|$$

برای n نامتناهی n را به قدری می‌گیریم

$$f(n) = |4n^4 - 2n^3 + 2| \leq |4n^4 + 2n^4 + 2n^4| = \underbrace{13}_M \underbrace{|n^4|}_{g(n)}$$

تعریف: اگر $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشد برای x های به قدری کافی بزرگ به صورتی که وقتی $n \rightarrow \infty$

$f(n)$ مرتبه $g(n)$ است $f(n) = O(g(n))$ هر دو اعداد مثبت M و n_0 وجود

دارد باشد $|f(n)| \leq M |g(n)|$ $\forall n, n_0 < n < \infty$

تعریف: اگر $f(n)$ و $g(n)$ دو تابع باشد که برای x های به قدری کافی بزرگ $f(n)$ مرتبه $g(n)$ است

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad \text{هر دو } f(n) = o(g(n)) \quad \text{هر دو } o$$

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri

Subject: _____

معمولا
حسابات یک دقیقه

برای آن توابعی که در $AX=b$ باعث تغییرات زیاد در جواب می‌باشد x شود همیشه مشکل است

حساست (تغییر) بر ضرایب

و می‌توان تغییر در b باشد $(b+\delta)$ تا تغییر در یکی از ستون های ماتریس A باشد

فصل ۲ کتاب درون یابی و تقریب توانی

موضوع کسیر فضا به شکل $f(n)$ موجود باشد

n_i	x_0	x_1	...	x_n
f_i	f_0	f_1	...	f_n

تقریب از روی چند نقطه x_i, f_i آن موجود باشد

صورت کسر از درجه $n+1$ داریم

در این صورت

$$L_n(n) = \frac{(n-x_1)(n-x_2) \dots (n-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_n)}$$

عدد دانسته

$$L_1(n) = \frac{(n-x_1)(n-x_2) \dots (n-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_n)}$$

$$L_n(n) = \frac{(n-x_0)(n-x_1) \dots (n-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \dots (x_n-x_{n-1})}$$

در این صورت تابع درونیابی همانند $P(n) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(n)$

صورت n تابع $P(n)$ نیز یک تابع به صورت x است

x	1	2	4	11
$f(x)$	1	3	7	11

8 $P(x)$ همانند 8 مقدار تقریبی

$$L_0 = \frac{(x-2)(x-4)(x-11)}{(1-2)(1-4)(1-11)}$$

$$L_1 = \frac{(x-1)(x-4)(x-11)}{(2-1)(2-4)(2-11)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-2)(x-11)}{(4-1)(4-2)(4-11)}$$

$$L_3 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(11-1)(11-2)(11-4)}$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$$P(n) = L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2 + L_3 f_3 \rightarrow \text{ضریب‌ها را در } x \text{ ضرب کن}$$

$$P(x) = \frac{x^4}{4} = 1.01 \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \rightarrow P(x) \text{ (برای } x=1 \text{) با بسط تیلور در هم$$

□

Note: ضریب‌های درجه یک و دو را به دست آوریم

اگر ضریب‌های $P(x)$ در C^n باشد $P \in C^n[a, b]$ $f, f', f'', \dots, f^{(n)}$ $f \in C^{n+1}[a, b]$ $x_0 \in [a, b]$ $n=0, 1, 2, \dots$ n درجه یک و دو را به دست آوریم

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

(x) ضریب‌های درجه یک و دو را به دست آوریم

x	0	1/4	1/2
f(x)	0	1/2	1

$$f = \sin(\pi x)$$

ضرایب $E(x)$ را به دست آوریم

$$L_0(x) = \frac{(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{1}{4})}$$

Ex. نشان دهید وقتی $x \rightarrow 0$ داریم

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \text{از مرتبه } (x^3)$$

سری مک لورن

حل: بنابر سری مک لورن داریم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} e^{\xi(x)} \quad (1)$$

$$0 < \xi(x) < x$$

برای x ها در همسایگی صفر $|x| < 1$

$$e^{\xi(x)} < e^x < e^1 < 3$$

$$(1) \left| \frac{x^3}{3!} e^{\xi(x)} \right| < \left| \frac{x^3}{3 \times 2} \right| = \left| \frac{x^3}{2} \right|$$

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \right) \right| \leq \left| \frac{1}{2} x^3 \right|$$

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) = O(x^3)$$

پس

$$M = \frac{1}{2}, \quad \delta = 1 \quad \square$$

(Note) فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه (x, y) مشتق های نسبی تا مرتبه $n+1$ را داشته باشد

آنگاه برای هر $(x+h, y+k)$ در این همسایگی داریم

$$f(x+h, y+k) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$$

$$P_n(x, y) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(x, y)$$

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x+\theta h, y+\theta k) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

(note) توضیحات:

if $j=0$ $\frac{1}{0!} f(x, y)$

if $j=1$ $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$

if $j=2 \rightarrow \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) = \frac{1}{2} \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$

Ex (تابع $f = e^{x+y}$ را در محاسبات زیر) باب تابع فضا تقریب کنید

حل: (سپارشیو)

$$P_1 = f(0,0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$f(0,0) = e^{0+0+0} = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1(e^{x+y}) \Big|_{(0,0)} = e^0 = 1$$

chic

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y+1)e^{x+y+y^2} \quad | \quad (0,0) = e^0 = 1$$

□

Ex. تبدیل عددهای ریاضی منهای صغریه

$n = (0, 1, 1, 2, 5)$ در منهای ۲ تبدیل

$$\left. \begin{array}{l} 0, 1, 1, 2, 5 \times 2 = 1, 4, 2, 5, 0 \rightarrow d_1 = 1 \\ 1, 4, 2, 5, 0 \times 2 = 1, 2, 5, 0, 0 \rightarrow d_2 = 1 \\ 1, 2, 5, 0, 0 \times 2 = 1, 5, 0, 0, 0 \rightarrow d_3 = 0 \\ 1, 5, 0, 0, 0 \times 2 = 1, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\} \rightarrow (1, 1, 0, 1)_2$$

Ex. مرقه کنید $(n = \frac{1}{f})_1$ باشد

$$\frac{1}{f} \times 2 = \frac{2}{f} \quad d_1 = 0$$

$$\frac{2}{f} \times 2 = \frac{4}{f} \quad d_2 = 1$$

$$\frac{4}{f} \times 2 = \frac{8}{f} \quad d_3 = 0$$

$$\frac{8}{f} \times 2 = \frac{16}{f} \quad d_4 = 1$$

$$\frac{16}{f} \times 2 = \frac{32}{f} \quad d_5 = 0$$

$(0, 1, 0, 1, 0, \dots)$
اولیای ۲

Note) حصار برش ۰۱۲۴۴۴۴۴۴۴

↓
حضای گرویدن

۱۲۴۴۴۴۴۴۴ (حضای برش درام) ۷ رقم اعشاری
زمانی که از یک رقم به عدد وصل شود

۰۱۲۴۴۴۴۴۴۷

↓
رقم هفتم از برش از دهان یک واحد به رقم
هفتم، اضافه کرده پس Cut زده در غیر اسفورت اضافه
می‌شود

Note) تبدیل عددهای اعشاری به مضارب (۱)

$p_r, p_i, d_i, d_r, d_n, \dots$

$$(p_r \times r^{-1}) + (p_i \times r^{-i}) + (d_i \times r^{-1}) + (d_r \times r^{-r}) + \dots$$

انواع مضاهای مورد استفاده در علوم انرژی مقدار تقریبی و مقدار دقیق باشد.

(i) مضای مطلق $|x - x^*|$

(ii) مضای نسبی $R = \frac{|x - x^*|}{|x|}$

(iii) مضای درصد نسبی $R \times 100$

Ex. اگر $\alpha = \frac{1}{3}$ و $\alpha^* = 0.3333$ تقریب برای آن باشد آنگاه خطا مطلق

$$e = |\alpha - \alpha^*| = \left| \frac{1}{3} - 0.3333 \right| = \frac{1}{3} (1 - 0.9999)$$

$$= \frac{1}{3} \times 10^{-4}$$

$$\frac{|\alpha - \alpha^*|}{|\alpha|} = \frac{\frac{1}{3} \times 10^{-4}}{\frac{1}{3}} = 10^{-4} \xrightarrow{\text{خطا نسبی}} 1.0 \times 10^{-2} = 10^{-2} \quad \square$$

(Note) (ارقام اعشاری درست)

مفروض کنید α^* تقریب برای α باشد اگر K بزرگترین عدد صحیح نامفروض باشد که

$$|\alpha - \alpha^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-K}$$

آنگاه α^* دارای K رقم اعشاری درست است. همچنین می‌توانیم بگوییم که α و α^* تا K رقم اعشاری درست با هم مطابقت دارند.

$$Ex. \quad \left| \pi - \frac{355}{113} \right| = 0.27 \times 10^{-6} < \frac{1}{2} \times 10^{-6}$$

7 رقم اعشاری درست

$$Ex. \quad \left| \pi - \frac{22}{7} \right| < 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

2 رقم اعشاری درست

(Note) (ارقام اعشاری درست)
اگر K بزرگترین عدد صحیح نامفروض باشد

$$\frac{|\alpha - \alpha^*|}{|\alpha|} < 5 \times 10^{-5}$$
 آنگاه α^* دارای $K+5$

5 رقم اعشاری درست است.

Subject _____

Year _____ Month _____ Day _____

$$x = 122,50$$

$$x^* = 122,50$$

(Ex

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{0,9}{122,50} < 5 \times 10^{-2}$$

تفاضلات تقسیم شده نیوتون

$$f[x_k] = f(x_k)$$

تکرار دومی (نیم):

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

که روند بازگشتی دارد

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] - f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}$$

Ex: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتون برای تابع f زیر

	x_1	x_2	x_3	x_4
x	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	5	11
	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$

حل:

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{2-1} = 2 = f'$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: _____

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1 - 2}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{1 - \infty}{1 - 1} = \frac{-\infty}{0} = \infty$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{0 - 1}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{1 - \infty}{1 - 1} = \frac{-\infty}{0} = \infty$$

x	$f(x)$	$f[,]$	$f[, ,]$	$f[, , ,]$
1	1			
2	2	2		
3	3	2	0	
4	11	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$

□

x	$f(x)$
-1	0
0	2
1	9
3	37

Ex: تفاضل تقسیم شده نوتون جدول زیر

حل:

$$f[x_1, x_2] = \frac{2 - 0}{0 - (-1)} = 2$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{9 - 2}{1 - 0} = 7$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{37-9}{2} = 14$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{7-2}{1-(-1)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{14-7}{3} = \frac{7}{3}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{7}{3}-\frac{5}{2}}{2-(-1)} = -\frac{1}{24}$$

x	$f(x)$	$f[\dots, \dots]$	$f[\dots, \dots, \dots]$	$f[\dots, \dots, \dots, \dots]$
-1	9	14	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{24}$
0	2			
1	7	7		
3	37	14	$\frac{7}{3}$	

چند جمله ای درون یاب به حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتون:

مهره دایم تفاضلات تقسیم شده نیوتون را زمانی استفاده می کنیم که فاصله نقاط x_i ها برابر نباشد
در صورتی که برابر باشند یعنی $x_{i+1} - x_i = h$ ، فاصله از تفاضلات بسط Δf_i و یا
تفاضلات بسط ∇f_i استفاده می کنیم

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad \text{بسط}$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad \text{بسط}$$

اکنون چند جمله ای درون یاب نیوتون بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) \approx p(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Date: / /

Sat.

Sun.

Mon.

Tue.

Thu.

Wed.

Fri.

Subject: _____

x	1	2	4	8
$f(x)$	1	3	7	11

 E_x : چند جمله‌ای درون یاب تابع زیر

x	$f(x)$	$F[\dots]$	$F[\dots, \dots]$	$F[\dots, \dots, \dots]$
1	1			
2	3	2		
3	7	2	0	
4	11	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{42}$

در مثال قبیل جدول متغیر به است اگر

$$P(x) = f(x_0) + (x-1) \overset{\text{مقدار}}{f[x_0, x_1]} + (x-1)(x-2) \overset{\text{مقدار}}{f[x_0, x_1, x_2]} + (x-1)(x-2)(x-4) \overset{\text{مقدار}}{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}$$

$$= -1 + 2x - \frac{1}{42} (x-1)(x-2)(x-4)$$

تابع درجه سوم است

چون ۴ نقطه به ۳ درجه نیاز داریم پس به است اگر

فرمول خطای نیوتون

$$E(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_n)}{(n+1)!}$$

فاصله خطای نادر است

||E||

حداکثر خطا

نقطه بهینه

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

Ex: چند جمله‌ای درون‌یاب نیوتون و حد اکثر خطا

x	$f(x)$	$f[\dots, \dots]$	$f[\dots, \dots, \dots]$	$f[\dots, \dots, \dots, \dots]$
2	0.49897	0.05918		
4	0.00018	0.04247	-0.00227	0.00042
1	0.0009	0.0118	-0.00377	
9	0.02424			

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$P(n) = 0.49897 + 0.05918(n-2) - 0.00227(n-2)(n-4) + 0.00042(n-2)(n-4)(n-1)$$

$$E(n) = \frac{(n-2)(n-4)(n-1)(n-9)}{4!} f^{(4)}_E(n)$$

$$f = \log n = \frac{\ln n}{\ln 10} \quad f' = \frac{1}{n \ln 10} \quad f'' = \frac{-1}{n^2 \ln 10}$$

$$f''' = \frac{2}{n^3 \ln 10} \quad f^{(4)} = \frac{-6}{n^4 \ln 10}$$

مقادیر در بازه [2 و 9] کانزیم خطا را به دست آوریم

$$\max f^{(4)} = \frac{12 (2)^{-4}}{\ln 10}$$

اندن من خواهم کانزیم $g = (n-2)(n-4)(n-1)(n-9)$ (به دست آوریم)

که خواست از و مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم سپس آنست که آن به دست آید

التم در بازه [2 و 9] اتفاق افتد

$$\max E(n) = 0.49897 \times 10^{-3}$$



Date: ۳۴ / ۳۵

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject:

معماری

معماری

تفاضل و انتگرال

 ∇f_i بر مبنای آن که فاصله تقریباً x_{i+1} و x_i یکسان باشد

$$h = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta f_{i+1} = f_{i+2} - f_{i+1}$$

از تفاضل و انتگرال استفاده می‌کنیم

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i = (f_{i+3} - 2f_{i+2} + f_{i+1}) - (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) =$$

$$= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

این فرمول‌ها حالت بازگشتی دارند

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$\nabla^3 f_i = \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1} = (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) - (f_{i-1} - 2f_{i-2} + f_{i-3}) =$$

$$f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

Date: / /

☐ Sat. ☐ Sun. ☐ Mon. ☐ Tue. ☐ Thu. ☐ Wed. ☐ Fri.

Subject: -----

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	f_0			
x_1	f_1	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$
x_3	f_3	Δf_2		

جدول پیشه

$$\Delta f_0 = \Delta f_1$$

$$\Delta^2 f_1 = \Delta^2 f_2$$

: Note

x	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
x_0	f_0			
x_1	f_1	∇f_1	$\nabla^2 f_1$	
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$	$\nabla^3 f_2$
x_3	f_3	∇f_3		

نرمال چند جمله‌ای درون یاب بیسرونی‌توان (فاصله نقاط و نقطه ابتدایی) $(S = \frac{x - x_0}{h})$

$$P(n_s) = f_0 + S \Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

چند جمله‌ای درون یاب بیسرونی‌توان $(S = \frac{x - x_n}{h})$

$$P(n_s) = f_n + S \Delta f_n + \frac{S(S+1)}{2!} \Delta^2 f_n + \frac{S(S+1)(S+2)}{3!} \Delta^3 f_n + \dots$$

خطا در چند جمله‌ای درون یاب بیسرونی‌توان

$$E(n_s) = \frac{S(S-1)(S-2) \dots (S-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

Ex: با استفاده از داده‌های جدول زیر $f(0.3)$ را بدست آورید.

x	x ₀	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
f(x)	0	0.199	0.389	0.545	0.717

$$\begin{cases} \Delta f_0 = f_1 - f_0 \\ \Delta f_1 = f_2 - f_1 \end{cases}$$

حل: ابتدا جدول تفاضلات بیسرونی‌توان آن را بنویسید

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0	0.199			
0.2	0.199		-0.009		
0.4	0.389	0.190		-0.005	
0.6	0.545	0.154	-0.014		-0.005
0.8	0.717	0.172	-0.024	-0.010	

$$S = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.3 - 0}{0.2} = 1.5$$

در نرمال درون یاب بیسرونی‌توان می‌نویسیم

$$P(0.3) = f_0 + S \Delta f_0 + \frac{S(S-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{S(S-1)(S-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$$= 0 + 1.5(0.199) + \frac{1.5(1.5-1)}{2} (-0.009) + \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)}{6} (-0.005) +$$

$$\frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{24} (-0.005) = 0.295$$

$$S = \frac{y^3 - 0.1}{0.2} = -2.5$$

$$P(y^3) = f_n + S \nabla f_n + \frac{S(S+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots$$

$$P(y^3) = 0.1717 + (-2.5)(0.152) + \frac{(-2.5)(-2.5+1)}{2} (-0.024) +$$

$$\frac{(-2.5)(-2.5+1)(-2.5+2)}{4} (-0.010) + \frac{(-2.5)(-2.5+1)(-2.5+2)(-2.5+3)}{24} (-0.005) =$$

$$0.295$$

$$f = \sin x$$

$$f(y^3) = \sin(0.3)$$

$$E = |\sin(0.3) - 0.295|$$

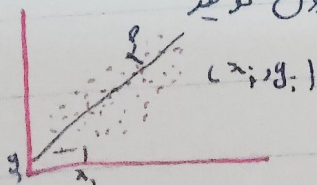
مقدار دقیق خطا

اگر فرض کنیم که آن بالا برای خطا درست کار میکند

$$E = \left| \frac{S(S-1)(S-2)(S-3)(S-4)}{5!} f^{(5)}(x) \right|$$

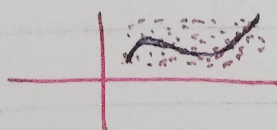
$$خطای نسبی = E = \frac{S(S+1)(S+2)(S+3)\dots(S+n)}{n+1!} f^{(n+1)}(x)$$

برای شش داده ها: درجه اول آماری، این بخش موجود است و به آن رگرسیون گویند



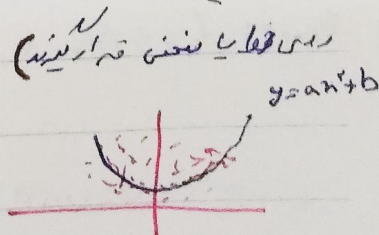
نقطه‌های نقاط (x_i, y_i) در $\mathbb{R}^2$ موجودند و می‌خواهیم منحنی (یا خط راست)

از میان این نقاط غیر دهیم تا خطای محاسب شده $\min$ شود (و نقاط زیادی



این منحنی غیر خطی است

خط یا منحنی درجه ۲ یا ۳ یا بالاتر باشد



دری خط یا منحنی قرار نگیرند

نکته: اگر بخواهیم یک معادله درجه ۲ مجهول بدست بگیریم، باید حداقل محاسبه می شود

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

ماتریس 2×2 بردار 2×1 بردار 2×1 ماتریس 2×1

Ex: خط کمترین توان های درم را برای داده های جدول زیر بنویسید

x	1	2	3	4
y	1	1.5	1.75	2

حل:

$$\sum 1 = 4 \quad \sum y_i = 4.75 \quad \sum x_i = 10 \quad \sum x_i^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 30$$

$$\sum x_i y_i = (1 \times 1) + (2 \times 1.5) + (3 \times 1.75) + (4 \times 2) = 17.75$$

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.75 \\ 17.75 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4b + 10a = 4.75 \\ 10b + 30a = 17.75 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12b - 30a = -11.75 \\ 10b + 30a = 17.75 \end{cases}$$

$$\underline{-2b = -1.75 \rightarrow b = \frac{1.75}{2} = 0.875} \quad a = 0.125$$

$$y = ax + b \rightarrow y = 0.125x + 0.875$$

نکته: اگر بخواهیم یک معادله درجه ۲ را در برازش بدست بگیریم.

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

ماتریس 3×3 بردار 3×1 بردار 3×1

Ex: خط کمترین توان های درجه ۲ را برای داده های زیر برازش کنید

x	1	3	4	5	6	7
y	2	7	8	10	11	11

$$\sum 1 = 6 \quad \sum x_i = 26 \quad \sum y_i = 49 \quad \sum x_i^2 = 144$$

$$\sum x_i^2 y_i = (1^2 \times 2) + (3^2 \times 7) + \dots + (7^2 \times 11) = 1378$$

$$\sum x_i y_i = (1 \times 2) + (2 \times 4) + \dots + (6 \times 11) = 228$$

$$\sum x_i^2 = (1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 9^2 + 11^2) = 224$$

$$\sum x_i^3 = 440$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 22 & 134 \\ 22 & 134 & 224 \\ 134 & 224 & 440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 228 \\ 1378 \end{bmatrix}$$

$$c = -1.03$$

$$b = 3.24$$

$$a = -2.1$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = (-2.1)x^2 + (3.24)x + (-1.03)$$

بر ارزش های e^{ax} به حسب e می باشد سعی بر این است با تغییر مقیاس آن را به معادله خطی تبدیل کنیم پس از روش کمترین مربعات (جله قبل) آن را حل کنیم و ضرایب را بدست آوریم

Ex: $y = ce^{ax}$ باید که مناسب داده های زیر باشد

x	1	2	4	6	9	15
y	4	3.5	2.9	2.5	2.18	2
$Y = \ln y$	$\ln 4 = 1.39$	1.25	1.06	0.92	0.81	0.69

$$y = ce^{ax} \rightarrow \ln y = \ln c + ax$$

$$Y = b + ax$$

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum x_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$\sum x_i = (1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 15) = 37$$

$$\sum x_i^2 = (1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 9^2 + 15^2) = 247$$

$$\sum Y_i = 4.32$$

$$\sum x_i y_i = (1 \times 1, 39) + (3 \times 1, 48) + (4 \times 1, 04) + (4 \times 1, 92) + (9 \times 1, 01) + (18 \times 1, 49) = 34, 32$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 31 \\ 31 & 341 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4, 32 \\ 34, 32 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 4b + 31a = 4, 32 \\ 31b + 341a = 34, 32 \end{cases}$$

$$b = 1, 134$$

$$a = -0, 042$$

$$b = \ln c \rightarrow c = e^b \rightarrow c = e^{1, 134} = 3, 182$$

$$y = c e^{ax}$$

$$y = c e^{ax}$$

$$y = 3, 182 e^{-0, 042x}$$

فردین رشتی‌ها آن تا مرتبه دوم در این بازه پیوسته باشد

$$f \in C^2[x_0, x_1]$$

تقریب ۲ صفحه ۴۱

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{h^2}{2} M$$

$$f(x) - P_1(x) = E(x)$$

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi) \quad \xi \in \left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) \quad f''(\xi) = \frac{h^2}{2} M \quad \max f'' = M$$

$$y = (x-x_0)(x-x_1)$$

$$y' = (x-x_1) + (x-x_0) = 0 \rightarrow x = \frac{x_0+x_1}{2}$$

$$\left| y\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) \right| = \left| \left(\frac{x_0+x_1}{2} - x_0\right) \left(\frac{x_0+x_1}{2} - x_1\right) \right| = \left| \left(\frac{x_0+x_1-2x_0}{2}\right) \left(\frac{x_0+x_1-2x_1}{2}\right) \right| =$$

$$\left| \left(\frac{x_1-x_0}{2}\right) \left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \right| = \frac{h^2}{4}$$

□

تقریب ۲ صفحه ۴۱

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1, \quad \forall x$$

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) x^k = x^k, \quad \forall x, \quad \forall k \leq n$$

نکته: اگر $k > n$

نکته: اگر $k > n$

حل: چون $K < n$ پس خطا برابر صفر است

$$f(n) = \sum L_i(n) f_i + E(n)$$

if $f(n)=1 \rightarrow 1 = \sum L_i(n)(1) \checkmark$

$$f(n) = x^K \rightarrow f(n) = \sum L_i(n) f_i + 0 \rightarrow x^K = \sum L_i x^K$$

$$\begin{vmatrix} P_i(n) & 1 & x & x^2 \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ f_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

سوال ۱۲ صفحه ۹۳

$$i=0, 1, 2 \quad f_i = f(x_i)$$

دارد های زیر را $y = \frac{x}{a+bx}$

x	-1	0	1/2	2	3
y	1	0	1/2	1/5	1/9

Ex: پاروش خطی سازی، بهترین فیتنی بعد از

برازش کند

حل:

$$\frac{1}{y} = \frac{a+bx}{x} = a(\frac{1}{x}) + b \rightarrow Y = ax + b$$

x	-1	1/2	2	3
y	1	1/2	1/5	1/9
$X = \frac{1}{x}$	-1	1/2	1/2	1/3
$\frac{1}{y}$	1	2	5	9

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix}$$

مقایسه ای

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri

Subject:

Ex در جدول زیر x را که متناظر است $f(x) = 0.39875$ تعیین کنید این فرایند درون یابی معکوس است

$Y = x$	۲۰	۲۵
$X = f(x)$	۰.۳۴۲۰۲	۰.۳۹۸۷۵

X	۰.۳۴۲۰۲	۰.۳۹۸۷۵
Y	۲۰	۲۵

$$\textcircled{1} Y = b + ax \quad \begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

زمانی که از دستگاه a و b به دست آید در جدول (D) گذاشته
آنگاه به جدولی $X = 0.39875$ گذاشته و Y (مجهول) به دست آید $\square$

فصل سوم معادلات غیر خطی

به ازای حل معادلات غیر خطی (یا پیدا کردن ریشه $f(x) = 0$ در بازه $[a, b]$) سه تان از روش های
۱. بiseksi (منصفه)، ۲. روش تقاطع ثابت، ۳. روش نیوتون، ۴. روش رابسون، ۵. روش ووتری، ۶. روش استکین و...
استفاده کرد $x^4 - 4x^3 + 2 \sin x = 0 \rightarrow$ معادله غیر خطی

ϵ به ازای هر داده ϵ بازه $[a, b]$ را طوری می بینیم که $f(a) \cdot f(b) < 0$ که ضابطه می کشد ریشه ای در
 $[a, b]$ صدور است

روش ۱ بiseksi

گام ۱: پیدا کردن بازه $[a, b]$ که $f(a) \cdot f(b) < 0$

گام ۲: $[a, b]$ را نصف کرده
 $a \quad c = \frac{a+b}{2} \quad b$

$a_{new} \rightarrow b_{new}$

گام ۳: اگر $f(a) \cdot f(c) < 0$ باشد بازه جدید $[a, c]$

گام ۴: اگر $f(c) \cdot f(b) < 0$ باشد بازه جدید $[c, b]$
 $a_{new} \quad b_{new}$

آنگاه ریشه را تکرار می کنیم تا زمانی که $|b_{new} - a_{new}| < \epsilon$ و خطای بقیه
 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Wed Fri

Subject: _____

نکته! اگر $AX=b$ داشته باشیم این مسئله باید صریحاً حل داشته باشد نسبت به ضرایب آن
 جذبی در معادله ها b ، حسب سبب ف می نشان ندهد
 (نکته! اگر داشته باشیم $AX=b$ این مسئله باید صریحاً حل داشته باشد نسبت به ضرایب آن)

$$\|A\| \|x\| \|A^{-1}\| < 1$$

Ex: تقریبی برای معادله زیر با $\epsilon = 10^{-3}$ بدست آورید (منصف)

$$f(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

حل: می‌توانیم بازه $[a, b]$ که $f(a) \cdot f(b) < 0$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

$$\rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

پس طبق قضیه رشم در $[0, 1]$ موجود است

$$C = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1-1+2}{4} = \frac{1}{4} < 0 \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$$

$$[a, b] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$C = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9+12-16}{16} = \frac{5}{16} > 0$$

$$f(0.75) \cdot f(1) < 0$$

بازه جدید $[0.75, 1]$ می‌باشد

$$C = \frac{0.75 + 1}{2}$$

تا مرحله ای که می‌رویم

	a	b	c	علامت $f(a)$	علامت $f(b)$	علامت $f(c)$
۳	۰.۷۵	۱	۰.۸۷۵	-	+	+
...						
۱۰	۰.۷۵۳۹۱	۰.۷۵۵۸۴	۰.۷۵۴۸۸	-	+	+
۱۱	۰.۷۵۳۹۱	۰.۷۵۴۸۸	۰.۷۵۴۳۳۹	-	+	-

$$|a_{new} - b_{new}| < \epsilon \quad \text{شرط توقف}$$

□

روش تکانه نقطه ثابت برای $f(x) = 0$

i) ابتدا می‌توانیم بازه $[a, b]$ که $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد

$$f(n) = g(n) - x \quad \text{یا} \quad f(n) = x - g(n) \quad \text{ii)}$$

می‌توانیم به شرطی که $g[a, b] \rightarrow [a, b]$ و $|g'| < 1$

پس روش نقطه ثابت از یک نقطه اولیه $x \in [a, b]$ شروع می‌شود که $x_{n+1} = g(x_n)$

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri

Subject:

$$x_1 = g(x_0) \rightarrow x_2 = g(x_1) \rightarrow x_3 = g(x_2)$$

$$\text{نقطة ثابت} \quad |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

$$\epsilon = 0.001 \times 10^{-r} \quad \text{Error: Ex}$$

$$f(x) = x \ln x - x = 0$$

$$f(2) = 2 \ln 2 - 2 = -\ln 2 < 0$$

$$f(4) = 4 \ln 4 - 4 > 0$$

$$f(2) \cdot f(4) < 0$$

نقطة ثابت في $[2, 4]$ حسب

$$x \ln x = x$$

$$x = \frac{1}{r} \ln x + r$$

$g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{x} \right) + r \rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} < 1$$

$$x \in [2, 4]$$

$$\text{if } x=2 \rightarrow |g'| = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} < 1$$

$$\text{if } x=4 \rightarrow |g'| = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{16} \right) = \frac{1}{16} < 1$$

$$x_0 \in (0, \infty) \subseteq [2, 4]$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{r} \ln x_n + r$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1}{r} \ln(2/0) + r = 1/4 \approx 1.125$$

$$x_2 = g(x_1) = 1/4 \approx 1.125$$

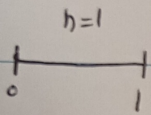
نقطة	x_n
2	1/4 + 1.125
4	1/4 + 1.125
2	1/4 + 1.125
4	1/4 + 1.125



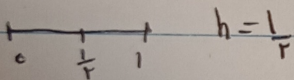
روش رانج: یک روش تقریبی در محاسبه انتگرال لایب نیر است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{دورنقره} \quad T_1 \\ \text{بیرونی} \quad T_r \\ \text{بیرونی} \quad T_f \\ \text{بیرونی} \quad T_\lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} T_r^{(1)} = \frac{4T_r - T_1}{3} \\ T_f^{(1)} = \frac{4T_f - T_r}{3} \\ T_\lambda^{(1)} = \frac{4T_\lambda - T_f}{3} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} T_r^{(2)} = \frac{4T_r^{(1)} - T_r}{18} \\ T_f^{(2)} = \frac{4T_f^{(1)} - T_r^{(1)}}{18} \\ T_\lambda^{(2)} = \frac{4T_\lambda^{(1)} - T_f^{(1)}}{18} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} T_r^{(3)} = \frac{4T_r^{(2)} - T_r^{(1)}}{99} \end{array} \right.$$

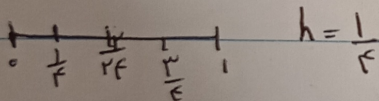
Ex مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$ به روش رانج؟



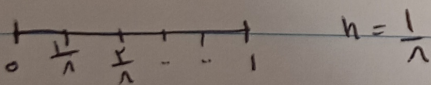
$$T_1 = \frac{h}{2} (f(0) + f(1)) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \right] = \frac{3}{4} = 0.75$$



$$T_r = \frac{1/2}{2} (f(0) + 2f(1/2) + f(1)) = 0.81944$$



$$T_f = \frac{1/4}{2} (f(0) + 2f(1/4) + 2f(1/2) + 2f(3/4) + f(1)) = 0.83170$$



$$T_\lambda = \frac{h}{2} (f(0) + 2f(1/n) + 2f(2/n) + \dots + 2f((n-1)/n) + f(1)) = 0.8349$$

$$T_r^{(1)} = \frac{4T_r - T_1}{3} = \frac{4(0.81944) - (0.75)}{3} = 0.84259$$

$$T_f^{(1)} = \frac{4T_f - T_r}{3} = 0.84579$$

$$T_\lambda^{(1)} = \frac{4T_\lambda - T_f}{3} = 0.8494$$

$$T_f^{(2)} = \frac{16T_f^{(1)} - T_r^{(1)}}{15} = 0.8523$$

$$T_A^{(1)} = \frac{14 T_A^{(0)} - T_K^{(1)}}{15} = 0.183568$$

Subject:

$$T_A^{(2)} = \frac{14 T_A^{(1)} - T_K^{(2)}}{15} = 0.183569$$

تقریبی برابر است

140 / /

فصل ۵ (روش های عددی برای حل معادلات دفرانسیل)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

$g' = x^2 + y^2$ $g(0) = 1 \rightarrow g_0 = 1$	از $x=0$ تا $x=0.1$ (تقریبی) $h=0.1$ از سلسله مرتبه ۳
--	--

$$g'(0) = 0^2 + [g(0)]^2 = 1^2 = 1$$

$$g'' = 2x + 2y'g$$

$$g'(0) = 2(0) + 2[y'(0)][g(0)] = 2(1)(1) = 2$$

$$g''' = 2 + 2y''g + 2y'g'$$

$$g'''(0) = 2 + 2y''(0)g(0) + 2[y'(0)]^2 = 2 + 2[2][1] + 2[1]^2 = 1+2+2=5$$

$$g(0.1) = g(0) + \frac{(0.1-0)}{1!} g'(0) + \frac{(0.1-0)^2}{2!} g''(0) + \frac{(0.1-0)^3}{3!} g'''(0)$$

$$g(0.1) = 1 + \frac{0.1}{1} (1) + \frac{(0.1)^2}{2} (2) + \frac{(0.1)^3}{6} (5) = 1.11345$$

$$y'(0.1) = (0.1)^2 + [y(0.1)]^2 = 1.1245041$$

(مكرر 2)

$$y''(0.1) = 2(0.1) + 2y'(0.1)y(0.1) = 2.947358$$

140 / /

$$y'''(0.1) = 2 + 2y''(0.1)y(0.1) + 2[y'(0.1)]^2 = 11.49579$$

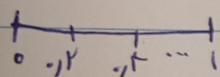
$$y(0.2) = y(0.1) + \frac{(0.2-0.1)}{1!} y'(0.1) + \frac{(0.2-0.1)^2}{2!} y''(0.1) + \frac{(0.2-0.1)^3}{3!} y'''(0.1)$$

$$= 1.152729 \square$$

$$y_{i+1} = y_i + h \underbrace{f(x_i, y_i)}_{(y'=f)} \quad (\text{روش اولییر})$$

سرعت اولییر بالاتر از تیلور است.

$$\text{Ex } y' = y + x^2 = f \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad 0 < x \leq 1 \quad , \quad h = 0.2 \quad \text{پس}$$



اولییر؟ حل:

$$y_1 = y(0) + 0.2[y(0) + 0] = 1 + 0.2[1] = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + 0.2[y_1 + x_1^2] = 1.2 + 0.2[1.2 + (0.2)^2] = 1.448$$

	تقریب y_k	دقیق y
0.2	1.4480	1.5155
0.4	1.7494	1.9044
0.6	2.11955	2.4444
1	2.7424	3.1548

مقدار y دقیق از روش کتاب معادلات دیفرانسیل

$$y' = y + x^2 \quad \text{به دست می آوریم}$$

$$y' - y = x^2 \quad \downarrow \text{معادله خطی}$$

$$y' - y = \underbrace{x^2}_{g(x)} \Rightarrow \mu = e^{-\int 1 dx} = e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{\mu} \left[\int \mu g(x) dx + c \right] = \frac{1}{e^{-x}} \left[\int e^{-x} x^2 dx + c \right]$$

چیز به جز جدول

$$z_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k) \quad (\text{اولیه محاسبه شده})$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, z_{k+1}) \right)$$

سرعت اولیه محاسبه شده از اولیه بالاتر است.

$$n=0.1, 0 \leq x \leq 1, y(0)=1, \quad y' = y + x^2 f \quad (Ex)$$

اولیه محاسبه شده

$$z_1 = y_0 + 0.1 [y'(0) + x^2] = 1 + 0.1 = 1.1$$

حل:

$$y_1 = y(0) + \frac{0.1}{2} \left[(y'(0) + x^2) + (z_1 + (1.1)^2) \right] = 1.1055$$

x_k	z_k	y_k
0.1	1.1170	1.1221
0.2	1.1504	1.1515
0.3	1.189	1.1905
0.4	1.2412	1.2412
0.5	1.292	1.292
1	1.292	1.292

□

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: _____

روش نیوتون را مقبول NR

برای حل عددی یک معادله $f(x) = 0$ یا محاسبه ریشه آن استفاده می‌شود ابتدا بازه $[a, b]$ را ملوک می‌یابیم که $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد پس $x_0 \in [a, b]$ اختیار کرد

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

ϵ خطای قابل قبول که می‌تواند $\epsilon = \frac{1}{r} \times 10^{-k}$

روش کاتلین استیفنس

یک روش تکراری برای حل معادله $f(x) = 0$ و یا پیدا کردن ریشه $f(x)$ می‌باشد

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2} = x_n - \frac{\Delta x_n}{\Delta^2 x_n}$$

note

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

شرایط توقف

از یک نقطه اولیه $x_0 \in [a, b]$ شروع می‌شود که $f(a) \cdot f(b) < 0$ باشد

سین $x_1 = g(x_0)$ (همان تابع نقطه ثابت)

سین $x_1 = g(x_0)$ بدست آورد و برای محاسبه x_2 در فرمول قرار می‌دهیم

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2}$$

زیرا این روش سه نقطه اولیه لازم دارد

x_0 را از $[a, b]$ انتخاب کرده

$x_1 = g(x_0)$ و $x_2 = g(x_1)$ را به این صورت بدست می‌آوریم

Ex! ریشه منفی $x^2 - x - 2 = 0$ به روش Δ^2

$$x_0 = -1.5, [-2.5, -1.5]$$

$$f(x, 5) = (-2.5)^2 + (-2.5) - 2 > 0$$

$$f(-1/5) = (-1/5)^2 + (-1/5) - 2 < 0$$

$$f(1/5) \cdot f(-1/5) < 0$$

$$x_0 = -1/5 \in [-1/5, -1/5] \text{ پس}$$

$$x' = 2 - x$$

اکنون تابع $g(x)$ را پیدا می‌کنیم

$$x = \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x} - 1 = g(x)$$

$$|g'(x)| = \left| -\frac{2}{x^2} \right| \leq 1 \quad x \in [-1/5, -1/5]$$

$$x_1 = g(x_0) = g(-1/5) = \frac{2}{-1/5} - 1 = -2.3333$$

$$x_2 = g(x_1) = g(-2.3333) = \frac{2}{-2.3333} - 1 = -1.85714$$

در فرمول ① گذاشته

$$x_3 = -1/5 - \frac{(-2.3333 - (-1/5))^2}{-1.85714 - 2(-2.3333) + (-1/5)} = -2.0303$$

مرحله دوم: مثال: کنواسیت x_3 را به جایی x_0 اولیم، جایگزینی کرده پس $x_1 = g(x_0)$ و $x_2 = g(x_1)$

بدست آید در نهایت x_3 جدید بدست آید و تا زمانی ادامه می‌یابد که

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

روش تقطعات

n	x_n	e_n خطا
2	-1.8571	0.1429
3	-2.0749	0.0749
4	-1.9430	0.0370
;		
12	-1.9999	0.0001

n	x_n	e_n
1	-2.0303	0.0303
2	-2.00007	0.00007
3	-2	0

$$f(x) = x^4 - x - 1. \quad \text{EK: به روش NR}$$

بازه $[1, 2]$ برای ریشه مثبت و $x_0 = 2$

بازه $[-2, -1]$ برای ریشه منفی $x_0 = -1.5$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 1}{4x_n^3 - 1}$$

برای بازه $[1, 2]$ و $x_0 = 2$

$$x_1 = 2 - \frac{2^4 - 2 - 1}{4(2^3) - 1} = 1.170941$$

$$x_2 = 1.170941 - \frac{(1.170941)^4 - (1.170941) - 1}{4(1.170941)^3 - 1} = 1.185571$$

n	x_n برای مثبت	n	x_n
0	2	0	-1.5
1	1.170941	1	-1.737049
2	1.185571	2	-1.491742
3	1.185571	3	-1.497473
4	1.185571	4	-1.497473

روش نیوتون تقسیم یافته (برای ریشه تکراری)

$$f(x) = (x - \alpha)^m \quad \text{برای}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m f(x_n)}{f'(x_n)}$$

این روش سرعت همگرایی آن از NR معمولی بیشتر است

Ex: روش NR تقسیم یافتہ؟
 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})^2$
 روش NR - با تکرار ۲، روش NR - با تکرار ۲

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(x_n^4 - 4x_n^2 + 4)}{4x_n^3 - 8x_n}$$

n	x_n	دقت e_n
0	1.5	1.5×10^{-1}
1	1.4444	2.5×10^{-2}
2	1.4142	2.1×10^{-4}
3	1.4142	2.1×10^{-8}

$e_n =$ | جواب دقیق - جواب تقریبی |

$$x_{n+1} = \frac{x_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

روش ریتی

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

Ex: تقریب برای $\sqrt{2}$ ($x^2 - 2 = 0$)

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$[a, b] = [1.5, 2.5]$$

$$x_0 = 1, x_1 = 2$$

این دو نقطه را خردمان در [داریم] اختیار می‌کنیم

$$x_p = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

دور ۲

مشتق گیری و اشتغال گیری

در این فصل، بدون آن که خط فاصله تابع F را داشته باشیم و با توجه بهجدول نقاط x_i و f_i مشتق تابع را محاسبه می کنیم و می توان اشتغالتابع را نیز بدون داشتن فاصله محاسبه کرده (در بازه $[a, b]$)روش های مشتق گیری عددی
 Δf_i پیشرویندخت
 ∇f_i پسرویندختدر صورتی که فاصله نقاط x_i و x_{i+1} برابر باشند (۱)

روش پیشرویندخت: می داریم درون یاب پیشرویندخت به صورت زیر است

$$P(x_n) \approx f_0 + s \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$(ds = \frac{1}{h} dx) \text{ (if } x = x_0 \rightarrow s = 0 \text{)}$$

در این از ساده سازی داریم

در نقطه x

$$P'(x_n) \approx \frac{1}{h} (\Delta f_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{2} + \frac{\Delta^3 f_0}{3} - \dots)$$

روش پسرویندخت برای مشتق گیری عددی

$$P(x_n) \approx f_n + s \nabla f_n + \frac{s(s-1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots$$

و مشتق گیری از رابطه بالا داریم (ساده سازی)

$$P'(x_n) \approx \frac{1}{h} (\nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} - \frac{\nabla^3 f_n}{3} + \dots)$$

Note: جدول دو نقطه ای مشتق پسرو

SEPANTA

$$\text{پایه } f'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta F_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

$$\text{پایه } f'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta F_0 - \frac{\Delta F_0}{2}) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}$$

$\downarrow$ $F_1 - F_0$ $\downarrow$ $F_2 - 2F_1 + F_0$

فرمول سه نقطه‌ای

$$f'(x_0) = \frac{2F_2 - 9F_1 + 18F_0 - 11F_0}{9h}$$

فرمول پنج نقطه‌ای

$f'(x)$ مقدار

x	11.3	11.5	11.7	11.9	12.1
$f(x)$	3.449	4.183	5.175	6.424	8.144

$$h = 11.5 - 11.3 = 0.2$$

حل!

x	$f(x)$	ΔF	$\Delta^2 F$	$\Delta^3 F$	$\Delta^4 F$
$x_0 = 11.3$	3.449	0.813	0.171	0.041	0.007
$x_1 = 11.5$	4.183	0.992	0.220	0.048	
$x_2 = 11.7$	5.175	1.212	0.248		
$x_3 = 11.9$	6.424	1.580			
$x_4 = 12.1$	8.144				

$$f'(11.3) = f'(x_0) = \frac{1}{h} (\Delta F_0 - \frac{\Delta^2 F_0}{2} + \frac{\Delta^3 F_0}{3} - \frac{\Delta^4 F_0}{4} + \dots)$$

$$= \frac{1}{0.2} \left(0.813 - \frac{0.171}{2} + \frac{0.041}{3} - \frac{0.007}{4} \right) = 3.477$$

$$f'(x_0 = 11.3) = \frac{2F_2 - 9F_1 + 18F_0 - 11F_0}{9h}$$

آنها را از فرمول پنج نقطه‌ای مقیاس استفاده کنید

$$= \frac{2(5.175) - 9(4.183) + 18(3.449) - 11(3.449)}{9(0.2)} = 3.479$$

SEPANTA

4. (0.2)

موفقیت بیشتر

تلاش بیشتر

$$f'(x) = e^x$$

در $f(x) = e^x$ تابع واقعی باشد

$$\text{خطا} = \text{error} = \left| f'(1.3) - e^{1.3} \right|$$

۳,۴۵۷ ۳,۴۴۹



هر چه خطا کمتر باشد دقت بیشتر

$$f'(4.9)$$

Ex: اگر جدول زیر را داشته باشیم

x	$x_0 = 1$	$x_1 = 1.2$	$x_2 = 1.3$	$x_3 = 1.4$
f(x)	۲,۱۵۵۲	۲,۱۵۷۳	۲,۱۴۹	۲,۱۴۵۹

$$h = 0.1$$

حل: با فرمول گزیده ای داریم

$$f'(1.1) = \frac{2f(1.4) - 9f(1.3) + 18f(1.2) - 11f(1.1)}{4h} = 0.13145$$



Ex: جدول زیر سرعت متوسط بین از پیرایه نشان می دهد. شتاب متوسط در $t = 240$

sec t	0	40	120	180	240
mile/sec h	0	0.125	0.2747	0.425	0.13853

حل: چون شتاب، مشتق سرعت است پس از مشتق گیری جدولی استفاده می کنیم و چون

$t = 240$ شتاب متوسط است پس از پیرایه می رویم

t	v(t)	Δv	$\Delta^2 v$	$\Delta^3 v$	$\Delta^4 v$
0	0				
40	0.125	0.125	0.99	0.0733	
120	0.2747	0.1497	0.1832	0.1742	0.1029
180	0.425	0.1503	0.3594		
240	0.13853	0.17349			

$$r'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta r_n + \frac{\Delta^2 r_n}{2} + \frac{\Delta^3 r_n}{6} + \frac{\Delta^4 r_n}{24} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{40} \left(2.7249 + \frac{0.1295}{2} + \frac{0.1142}{6} + \frac{1.029}{24} \right) = 0.01445$$



note: تحلیل خطا در مشتق گیری کردی

$$E(n) = \frac{5(5-1)(5-2)\dots(5-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(x)$$

از فرمول خطا درون یاب مشتق نیت به h گرفته و ساده سازی کرده

$$E'(n) = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(x)$$

مشتقات مرتبه دوم

از این فرمول و مشتق دوم بگیریم داریم:

$$P''(n) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \Delta^4 f_0 - \dots)$$

برای حالت سه نقطه داریم:

$$P''(n) = \frac{1}{h^2} (\Delta^2 f_n + \Delta^3 f_n + \Delta^4 f_n + \dots)$$

فرمول ۳ نقطه و مشتق دوم (حفظ شود)

$$f''(n) = \frac{f_r - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

فرمول ۴ نقطه ای

$$f''(n) = \frac{-f_r + 4f_r - 6f_1 + 2f_0}{h^2}$$

x	x_0	x_1	x_2	x_3
	1.3	1.5	1.7	1.9
$f(x)$	2.499	1.782	0.174	9.484
	2.499	1.782	0.174	9.484

در این جدول $f''(1.5)$

SEPANTA

$$f'(1.2) = \frac{f(1.9) - 2f(1.7) + f(1.5)}{(0.2)^2} = 2.5$$

h=0.2

$$f''(1.2) = \frac{-f(2.1) + 4f(1.9) - 6f(1.7) + 4f(1.5)}{(0.2)^3} = 4.3$$

همه مرتبه تعداد جملات بیشتر باشد (در فرمول) اگر روش دقیق تر است

فرمول مشتق دوم با استفاده از تیلور

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$$

$$\begin{cases} f_i = f(x_i) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}) \\ f_{i-1} = f(x_{i-1}) \end{cases}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4}$$

فرمول مشتق از $O(h^4)$

$$f'(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{-f_{i+2} + 14f_{i+1} - 30f_i + 14f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-f_{i+3} + 18f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 18f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3}$$

$8h^3$

من موفق خواهم شد

برای یادگیری ریاضیات

ابتدا فرض می‌کنیم که h و $\frac{h}{2}$ نوشته شود

$$Q(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

$$Q\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right) - f\left(a-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$f'(a) = \frac{fQ\left(\frac{h}{2}\right) - Q(h)}{3}$$

$$\frac{h}{2} = 1$$

$$f(x) = e^x$$

EX: برای

$$h = 2$$

x	1,1	1,9	2	2,1	2,2
f(x)	4,0594	4,4829	7,3891	8,1442	9,0250

f(2,1)

$$Q\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f\left(2+\frac{h}{2}\right) - f\left(2-\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{f(2,2) - f(2,0)}{2} = \frac{9,0250 - 4,0594}{2} = 2,4828$$

$$Q(h) = \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h} = \frac{f(2,2) - f(2,0)}{4} = \frac{9,0250 - 4,0594}{4} = 1,2464$$

$$= 1,2464$$

$$f'(2) = \frac{fQ\left(\frac{h}{2}\right) - Q(h)}{3} = \frac{f(2,4828) - 1,2464}{3} = 7,3891$$

مقدار تقریبی برای f' در نقطه 2

$$f'(x) = e^x \rightarrow F'(x) = e^x$$

مقدار دقیق مشتق در $x=2$ برای خطا، مقدار تقریبی، اشیای مقدار دقیق کرد

$$\int_a^b f(x) dx$$

روش های عددی برای انتگرال گیری

$$\int_a^b \tan x dx$$

فرض کنیم بخواهیم انتگرال را محاسبه کنیم

چون این انتگرال دشوار است زمان زیادی برای محاسبه می برد بهین دلیل از روش های عددی

(تقریب می زنیم) برای محاسبه این انتگرال های دشوار استفاده می کنیم

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(a) + f(b))$$

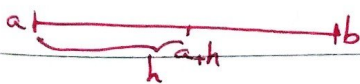
$h = b - a$
روش ذوزنقه ساده

در روش ذوزنقه ساده $[a, b]$ را تقسیم بندی نمی کنند. خطا $-\frac{h^3}{12} f''(\xi)$ می باشد

روش ذوزنقه مرکب $h = \frac{b-a}{n}$ بازه $[a, b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می کنند

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + f(b)]$$

خطا $-\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\xi)$



$$h = \frac{b-a}{2}$$

روش سیمپسون ساده

بازه $[a, b]$ را به 2 قسمت مساوی تقسیم می کنند

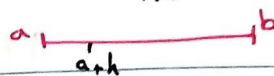
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(a) + 4f(a+h) + f(b))$$

خطا $-\frac{h^4}{90} f^{(4)}(\xi)$

Subject:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

روش سیمسون مرکب
از $[a, b]$ را به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کنند



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(a) + f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + f(b))$$

$$\frac{h^4}{180} (b-a) F''(\xi)$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Ex 1.1

الف) تقریبی با روش ذوزنقه $h = 0.25$

ب) یک دکان بالا برای خطا

$$E \approx \frac{h^4}{180} F''(\xi)$$

الف) بخواهیم تقریبی برای انتگرال با رقم اعشار درست بدست آوریم بازه $[0, 1]$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
f(x) = e ^{-x}	1	0.77881	0.60653	0.47237	0.36788

$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow 0.25 = \frac{1}{n} \Rightarrow n = 4$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

الف) ذوزنقه مرکب



$$\frac{h}{3} (f(0) + f(0.25) + 2f(0.5) + 2f(0.75) + f(1)) =$$

$$\frac{0.25}{3} (1 + 0.77881 + 2(0.60653) + 2(0.47237) + 0.36788) = 0.74291$$

$$f = e^{-x} \rightarrow f' = (-1)e^{-x}$$

$$f'' = (-1)e^{-x} + (-1)(-1)e^{-x} = 0$$

$$f''(0) = -1e^0 + 0 = -1$$

$$|E| = \left| \frac{h^4}{180} (b-a) F''(\xi) \right| \leq \left[\frac{(0.25)^4}{180} (1-0) \max_{\xi \in [0,1]} |F''(\xi)| \right] = \frac{1}{94}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n}$$

$$|E| \leq \frac{1}{4} \times 10^{-4}$$

$$\left| -\frac{h^2}{12} (b-a) f'' \right| \leq \frac{1}{4} \times 10^{-4}$$

برای f'' مقدار $\max$ برابر 1 است

$$\left| \frac{1}{4n^2} \right| \leq \frac{1}{4} \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{4} \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow 4n^2 \geq \frac{1}{\frac{1}{4} \times 10^{-4}} = 4 \times 10^4$$

$$\Rightarrow n^2 \geq \frac{4 \times 10^4}{4} = 10^4 \Rightarrow n \geq \sqrt{10^4}$$

حداقل n را لازم داریم

$$n = \left[\sqrt{10^4} \right] + 1 = 277 + 1 = 278$$

ساده

روش نقطه میانی مرکب



$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

در روش میانی نقطه اول $f(a)$ و نقطه آخر $f(b)$ را حذف می‌کنند

$$\text{میانی مرکب} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad x_i = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h [f(x_1) + \dots + f(x_n)]$$

$$\frac{(b-a)^2}{12} f''(\xi)$$

خطای میانی ساده

$$\frac{(b-a)h}{12} f''(\xi)$$

خطای میانی مرکب

x	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/4$	منظور باشد $\int_{1/2}^{1/4} f(x) dx$	$\rightarrow$ EX
$f(x)$	0.1823214	0.2893442	0.3344772	0.4044915	0.4760034		

$$a = 1/2 \quad b = 1/4$$

در $F(x) = \ln x$ باشد سیمین مرتبه، اما به کسب 8

$$\frac{h}{p} [F(1/2) + 4F(1/3) + 2F(1/4) + 4F(1/5) + F(1/4)]$$

$$h = \frac{b-a}{pn} = \frac{1/4 - 1/2}{pn} = \frac{1/4}{pn} = \frac{1}{4pn}$$

$$\frac{1}{4pn} [0.1823214 + 4(0.2893442) + 2(0.3344772) + 4(0.4044915) + 0.4760034] = 0.1332195$$

$$| - \frac{(b-a)h^p}{180} f^{(4)}(\xi) | = \left| \frac{(1/4 - 1/2) (1/4)^4}{180} \max |f^{(4)}(\xi)| \right| = \frac{4}{(1/4)^4}$$

$$F = \ln x \quad F' = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad F'' = (-1)x^{-2} \quad F''' = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$|F| = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = 14x^{-4} = \left| \frac{4}{x^4} \right| = \frac{4}{(1/2)^4} \quad \square$$

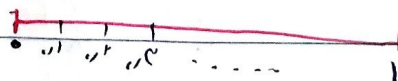
$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \quad h=1 \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

EX مقدار تقریبی اشتغال

$$x_i = a + (i - \frac{1}{2})h \quad i=1, \dots, n$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow n=10$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



$$x_1 = 0 + (1 - \frac{1}{4})h = \frac{1}{4}h = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = 0 + (2 - \frac{1}{4})h = \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}(1) = \frac{3}{4}$$

$$x_3 = 0 + (3 - \frac{1}{4})h = \frac{5}{4}h = \frac{5}{4}$$

$$x_{10} = 0 + (10 - \frac{1}{4})h = \frac{19}{4}$$

$$h [F(\frac{1}{4}) + F(\frac{3}{4}) + F(\frac{5}{4}) + \dots + F(\frac{19}{4})]$$

$$\frac{1}{4\sqrt{x}} \quad \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$\frac{(b-a)h^2}{12} F''(\xi) = 0 \quad h=1$$

$$f = \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f' = \frac{1}{4} (-\frac{1}{2}) x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'' = \frac{1}{4} (-\frac{1}{2}) (-\frac{3}{2}) x^{-\frac{5}{2}}$$

□

Note: برای محاسبه انتگرال زیر می‌توان از ۲ نقطه ای با GL ۳ نقطه ای استاندارد استفاده کرد

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\text{GL ۲ نقطه ای} \int_a^b f(x) dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\text{GL ۳ نقطه ای} \int_a^b f(x) dx \approx \frac{2}{3} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{2}{3} f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\text{Note: } \int_a^b f(x) dx \text{ باشد باید } x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2} \text{ و تغییر متغیر}$$

$$\int_a^b f(x) dx \text{ در انتگرال } dx = (\frac{b-a}{2}) dt$$

حل المسألة GL : $\int_0^1 \frac{1}{1+z^2} dz$ Eq

$$z = \frac{1-0}{r} t + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} t + \frac{1}{r}$$

$$dz = \frac{1}{r} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r} t + \frac{1}{r}\right)^2} \frac{1}{r} dt$$

$$= \frac{2}{9} \left[\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}(-\sqrt{2}) + \frac{1}{r}\right)^2} \right) \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{9} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}(0) + \frac{1}{r}\right)^2} \right) \frac{1}{r} \right] +$$

$$\frac{2}{9} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}(\sqrt{2}) + \frac{1}{r}\right)^2} \right) \frac{1}{r} \right] = 1,250 \approx 1,25 \quad \square$$

حل عددی معادلات دیفرانسیل:

روش رانگ کوتای مرتبه ۲

RK2

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (K_1 + K_2)$$

$$K_1 = h F(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h F(x_i + h, y_i + K_1)$$

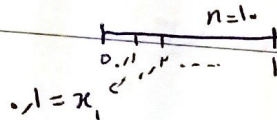
RK2

مثال: جواب مسئله مقدار اولی زیر به روش

$$h = 0.1$$

$$\begin{cases} y' = y + x^2 = f \\ y(0) = 1 = y_0 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 1$$



$$\begin{cases} \text{مرحله اول} \\ K_1 = h F(0, y_0) = 0.1 (1 + 0) = 0.1 \\ K_2 = h F(0.1, y_0 + K_1) = 0.1 (1.1 + (0.1)^2) = 0.111 \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (K_1 + K_2) = 1 + \frac{1}{2} (0.1 + 0.111) = 1.1055 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{مرحله دوم} \\ K_1 = h F(x_1, y_1) \\ K_2 = h F(x_1 + h, y_1 + K_1) \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{2} (K_1 + K_2) = 1.2241 \end{cases}$$

مرحله	تقریبی y_k	دقیقی y
۴	۱.۵۱۵۰	۱.۵۱۵۵ (در نقطه ۰.۴)
۵	۱.۹۰۵۲	۱.۹۰۴۴
۸	۲.۴۴۴۲	۲.۴۳۹۹
۱۰	۳.۱۵۰۴	۳.۱۵۴۸

من موفق خواهم شد

روش، اندک گامی مرتبه ۴ (حفظ شود) RK۴ دقیق تر از RK۳ است

$$K_1 = hF(x_i, y_i)$$

$$K_2 = hF\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hF\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = hF(x_i + h, y_i + K_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$