مروری بر حسابان :

قضیه تیلور : فرض کنید $f(x)$ و مشتق های آن تا مرتبه $n+1$ بر $[a,b]$ پیوسته باشند و $x_0 \in [a,b]$ ،

x عددی باشد $\xi(x)$ که x_0 وجود دارد که

$$f(x)=\underbrace{P_n(x)}_{\text{چندجمله‌ای (سری تیلور)}}+\underbrace{R_n(x)}_{\text{خطا}}$$

Zeta تابعی بر حسب x

سری تیلور حول نقطه x_0

$$(1)\quad P_n(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)^1}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

اگر $x_0=0$ باشد، فرمول (1) سری مک لورن تابع $f(x)$ را می‌دهد

Ex: سری تیلور $f(x)=\operatorname{arctg} x$ حول $x=\frac{1}{4}$ ؟

$$f(x_0)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\longrightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{\frac{17}{16}}=\frac{16}{17}$$

$$f''(x)=\frac{0-2x(1)}{(1+x^2)^2}\longrightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-2\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{(17)^2}{(16)^2}}=-\frac{(16)^2}{2(17)^2}$$

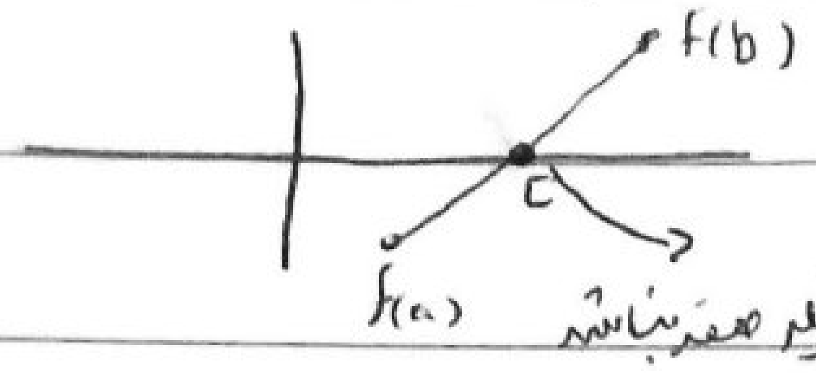
$$f^{(3)}(x)=f'''(x)=\frac{-2(1+x^2)^2-2(2x)(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^4}$$

در (1) گذاشته

$$P_n(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)}{1!}\left(\frac{16}{17}\right)+\frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}{2!}\left(-\frac{(16)^2}{2(17)^2}\right)+\cdots \quad \square$$

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

قضیه مقدار میانی برای توابع پیوسته: فرض کنید $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته و k عددی باشد که $f(a) < k < f(b)$ آنگاه عددی مانند $c \in (a,b)$ موجود است که $f(c)=k$



به عنوان مثال شکل را داریم:

$f(c)=k$ که در این شکل $k=0$ می‌تواند در مثال‌های دیگر صفر نباشد

حالت خاص قضیه میانی و اگر $f(a)<0<f(b)$ آنگاه $c\in(a,b)$ ای وجود دارد که $f(c)=0$

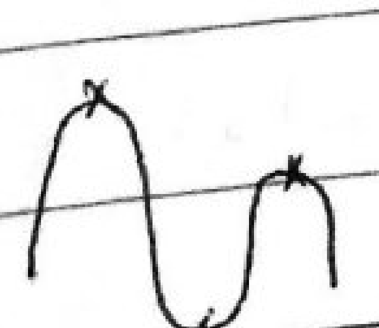
قضیه رول: اگر تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ آنگاه عددی مانند $c\in(a,b)$ موجود است که $f'(c)=0$

قضیه مقدار متوسط: اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر آنگاه عددی مانند $c\in(a,b)$ است که

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \Longleftarrow \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}=f'(c)$$

قضیه مقدار اکسترمم: اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته آنگاه α و $\beta\in[a,b]$ وجود دارند که $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ و $\forall x\in[a,b]$

نقاط α و β یا در نقاط انتهایی بازه هستند یا در صورتی که f بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد جایی هستند که $f'(x)=0$



Local اکسترمم محلی (نسبی)

اکسترمم مطلق (سراسری) global

نماد O بزرگ: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که برای xهای به قدر کافی بزرگ تعریف شده‌اند می‌گوییم وقتی $x\to\infty$، $f(x)$ از مرتبه $g(x)$ است یا $f(x)$، O بزرگ $g(x)$ می‌نویسیم

$$f(x)=O(g(x))$$

هرگاه اعداد حقیقی x_0 و $M>0$ وجود داشته باشد که $\forall x \geq x_0$ $\quad |f(x)| \leq M|g(x)|$

Ex: $\begin{cases} f(x)=4x^4-2x^3+5 \\ g(x)=x^4 \end{cases}$ آنگاه $f(x)=O(g(x))$ برای $x>1$

هر کسی نامساوی‌ها رو برقرار می‌کنیم $\quad$ چون $\leftarrow |x^3| \leq |x^4|$ $\quad x>1$

$$f(x)=|4x^4-2x^3+5| \leq |4x^4+2x^4+5x^4| = \underbrace{13}_{M}\underbrace{|x^4|}_{g(x)}$$

تعریف: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند برای xهای به قدر کافی نزدیک به صفر گوییم وقتی $x \to 0$

$f(x)$ از مرتبه $g(x)$ است $\quad f(x)=O(g(x))$ هرگاه اعداد مثبت δ و M وجود

داشته باشد $\quad \forall x,\ 0<|x|<\delta \quad |f(x)| \leq M|g(x)|$

تعریف: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که برای xهای به قدر کافی بزرگ تعریف شده‌اند می‌نویسیم

$f(x)=o(g(x))$ هرگاه $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

o کوچک

Ex. نشان دهید وقتی $x \to 0$ داریم

از مرتبه

$$\underbrace{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}}_{\text{سری مک لورن}} + O(x^3)$$

حل: بنا به سری مک لورن داریم:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} e^{\xi(x)} \quad (1)$$

$$0 < \xi(x) < x$$

برای x ها در همسایگی صفر ا $|x| < 1$

$$e^{\xi(x)} < e^x < \underset{2{,}71}{e^1} < 3$$

$$(1)\ \left|\frac{x^3}{3!} e^{\xi(x)}\right| < \left|\frac{x^3}{3 \times 2} \cdot 3\right| = \left|\frac{x^3}{2}\right|$$

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)\right| \le \left|\frac{1}{2} x^3\right|$$

پس

بزرگ

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = O(x^3)$$

$M = \frac{1}{2}$, $\underset{\text{دلتا}}{\delta} = 1$ $\square$

Note) فرمول تیلور برای توابع دو متغیره

فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه (x, y) مشتق های نسبی تا مرتبه $n+1$ را داشته باشد

آنگاه برای هر $(x + h , y + k)$ در این همسایگی داریم.

$$f(x+h,\ y+k) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$$

که

$$P_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(x,y)$$

که

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x+\theta h,\ y+\theta k)$$

$$0 \le \theta \le 1$$

Note) توجه داریم که:

if $j=0$ $\quad \frac{1}{0!} f(x,y)$

if $j=1$ $\quad \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$

if $j=2 \rightarrow \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) = \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right) f$

Ex) تابع $f = e^{x+y^2+y}$ را در همسایگی $(0,0)$ با یک تابع خطی تقریب بزنید

حل: (بسط تیلور)

$$P_1 = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$f(0,0) = e^{0+0^2+0} = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\left(e^{x+y^2+y}\right)\Big|_{(0,0)} = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y+1)e^{x+y^2+y}\Big|_{(0,0)} = e^0 = 1$$

□

Ex. تبدیل اعداد اعشاری به مبنای صفرویک

$x = (0/8125)$ در مبنای ۲ بنویسید

$0/8125 \times 2 = 1/6250 \rightarrow d_1 = 1$

$0/6250 \times 2 = 1/2500 \rightarrow d_2 = 1$

$0/2500 \times 2 = 0/5 \quad d_3 = 0$

$0/5 \times 2 = 1$ پایان

$\rightarrow (0/1101)_2$

Ex) فرض کنید $(x = \frac{1}{3})_{10}$ باشد

$\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} \quad d_1 = 0$

$\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \quad d_2 = 1$

$\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} \quad d_3 = 0$

$\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \quad d_4 = 1$

$\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} \quad d_5 = 0$

$\vdots$

$(0/010101\ldots)$

ادامه دارد

Note) خطای برش ۰/۲۴۴۴۴۴۴۶

خطای گردکردن

با ۷ رقم اعشار، ۰/۲۴۴۴۴۴۴۶ (خطای برش داریم)

(زمانی که از یک رقم به بعد قطع شود)

۰/۲۴۴۴۴۴۴۶۷

رقم هشتم اگر بیش از ۵ باشد یک واحد به رقم هفتم اضافه کرده و بقیه را cut زده در غیر اینصورت اضافه نمی‌کنیم

Note) تبدیل عدد اعشاری مبنای ۲ به مبنای ۱۰

$f_2 f_1 / d_1 d_2 d_3 \dots$

$$(f_2 \times 2^1) + (f_1 \times 2^0) + (d_1 \times 2^{-1}) + (d_2 \times \underbrace{2^{-2}}_{\frac{1}{4}}) + \dots$$

انواع خطاهای مورد استفاده در علوم اگر x^* مقدار تقریبی و x مقدار واقعی باشد.

i) خطای مطلق $|x - x^*|$

ii) خطای نسبی $R = \frac{|x - x^*|}{|x|}$

iii) خطای درصد نسبی $R \times 100$

Subject .... Year ...... Month ...... Day ......

Ex. اگر $x=\frac{1}{3}$ و $x^*=0.3333$ تقریبی برای آن باشد آنگاه خطا مطلق

$$e=|x-x^*|=\left|\frac{1}{3}-0.3333\right|=\frac{1}{3}(1-0.9999)$$

$$=\frac{1}{3}\times10^{-4}$$

خطای نسبی $\frac{|x-x^*|}{|x|}=\frac{\frac{1}{3}\times10^{-4}}{\frac{1}{3}}=10^{-4}\xrightarrow{\text{خطای درصد}}$

$100\times10^{-4}=10^{-2}$ □

Note) (ارقام اعشار درست)

فرض کنید x^* تقریبی برای x باشد اگر k بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد که

$$|x-x^*|<\frac{1}{2}\times10^{-k}$$

آنگاه x^* دارای k رقم اعشار درست است و هم چنین گفته میشود که x^* و x تا k رقم اعشار درست با هم تطابق دارند.

Ex. $\left|\pi-\frac{355}{113}\right|=0.27\times10^{-6}<\frac{1}{2}\times10^{-6}$

۶ رقم اعشار درست

Ex. $\left|\pi-\frac{22}{7}\right|<0.005=\frac{1}{2}\times10^{-2}$

۲ رقم اعشار درست

Note) (ارقام با معنی درست)

اگر s بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد $\frac{|x-x^*|}{|x|}<5\times10^{-s}$ آنگاه x^* دارای s رقم با معنی درست است.

$x\neq0$

Ex)

$$x = ۱۲۳٫۴۵$$

$$x^* = ۱۲۴٫۳۵$$

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{۰٫۹}{۱۲۳٫۴۵} < ۵ \times ۱۰^{-۲}$$

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

بنام خدا

حساسیت یک دستگاه

زمانی که تغییر کوچکی در $Ax=b$ باعث تغییرات زیاد در جواب نهایی x شود همین دستگاه را

حساسیت شدیدی برخوردار است

مثلاً می‌توان تغییر در b باشد $(b+\delta)$ یا تغییر در یکی از ستون‌های ماتریس A باشد

فصل ۲ کتاب : درون‌یابی و تقریب توابع:

فرض کنید فاصله تابع $f(x)$ موجود نباشد

تنها به ازای چند نقطه x_i ، f_i آن موجود باشد

x_i	x_0	x_1	...	x_n
F_i	f_0	f_1	...	f_n

در اینصورت

صورت کسر از درجه $n+1$ (x^{n+1}) داریم

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{\underbrace{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}_{\text{عدد ثابت ما}}}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

در اینصورت تابع درونیابی لاگرانژ

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

چون $L_i(x)$ تابع n ام است پس $P(x)$ نیز یک تابع برحسب x^n است

x	1	2	4	8
$f(x)$	1	3	7	11

Ex: چند جمله‌ای لاگرانژ و مقدار تقریبی $P(7)$ ؟

$$L_0 = \frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)} \qquad L_1 = \frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)}$$

$$L_2 = \frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)} \qquad L_3 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)}$$

$P(x) = L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2 + L_3 f_3 \rightarrow$ چندجمله‌ای درجه ۳

سپس $P(7)$ را برای $(x=7)$ را بدست می‌آوریم

$P(7) = \frac{76}{7} = 10.85714$

$\square$

Note: خطا در چندجمله‌ای درون‌یابی لاگرانژ

اگر چندجمله‌ای $P(x)$ که $P \in C^{n+1}[a,b]$ پیوسته ($f, f', f'', \ldots, f^{n+1}$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد)

را در نقاط $x_i \in [a,b]$ متمایز درون‌یابی کند

آنگاه خطای درون‌یابی عبارت است از

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi(x))$$

کمیتی (تابعی بر حسب x)

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	1

Ex برای جدول زیر تابع لاگرانژ $f = \sin(\pi x)$ و میزان بالایی برای $E(x)$ خطا؟

$$L_0(x) = \frac{(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{4})}$$

تفاضلات تقسیم شده نیوتون

قرار داد می کنیم: $f[x_k] = f(x_k)$

$$f[x_k , x_{k+1}] = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k , x_{k+1} , x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k , x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

یک روند بازگشتی دارد

$$f[x_k , x_{k+1} , x_{k+2} , x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] - f[x_k , x_{k+1} , x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}$$

Ex: جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن برای تابع f زیر؟

	x_1	x_2	x_3	x_4
x	۱	۲	۴	۸
$f(x)$	۱	۳	۷	۱۱
	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$

حل:

$$f(x_1 , x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

Date: / /

Subject:

$$f[x_2,x_3]=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{7-3}{4-2}=\frac{4}{2}=2$$

$$f[x_3,x_4]=\frac{11-7}{8-4}=\frac{4}{4}=1$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}=2-2=0$$

$$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}=\frac{1-2}{8-2}=-\frac{1}{6}$$

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}=\frac{-\frac{1}{6}-0}{8-1}=-\frac{1}{42}$$

x	$f(x)$	$f[\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ]$	$f[\ ,\ ,\ ,\ ]$
1	1			
		2		
2	3		0	
		2		$-\frac{1}{42}$
4	7		$-\frac{1}{6}$	
		1		
8	11			

Ex: تفاضلات تقسیم شده نیوتون جدول زیر را

x	$f(x)$
-1	0
0	2
1	9
3	37

حل:

$$f[x_1,x_2]=\frac{2-0}{0-(-1)}=2 \qquad f[x_2,x_3]=\frac{9-2}{1-0}=7$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{37-9}{2} = 14$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{7-2}{1-(-1)} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{14-7}{3} = \frac{7}{3}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{\frac{7}{3} - \frac{5}{2}}{3-(-1)} = -\frac{1}{24}$$

x	$f(x)$	$f[\dots, \dots]$	$f[\dots, \dots, \dots]$	$f[\dots, \dots, \dots, \dots]$
-1	0			
		2		
0	2		$\frac{5}{2}$	
		7		$-\frac{1}{24}$
1	9		$\frac{7}{3}$	
		14		
3	37			

چند جمله ای درون یاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

می دانیم تفاضلات تقسیم شده نیوتن را زمانی استفاده می کنیم که فاصله نقاط x_i ها برابر نباشد
در صورتی که برابر باشد یعنی $x_{i+1} - x_i = h$ آنگاه از تفاضلات پیشرو Δf_i و یا
تفاضلات پسرو ∇f_i استفاده می کنیم

پیشرو $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$

پسرو $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$

اکنون چند جمله ای درون یاب نیوتن بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) \simeq p(x) = f[x_0] + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \dots +$$
$$(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	۱	۲	۴	۸
$f(x)$	۱	۳	۷	۱۱

Ex: چند جمله ای درون یاب تابع زیر؟

در مثال قبل جدول مقابل بدست آمد

x	$f(x)$	$f[..,..]$	$f[..,..,..]$	$f[..,..,..,..]$
۱	۱			
		۲		
۲	۳		۰	
		۲		$-\frac{1}{42}$
۴	۷		$-\frac{1}{6}$	
		۱		
۸	۱۱			

$$P(x) = \overset{1}{f(x_0)} + \overset{f[x_0,x_1]}{(x-1)} + \overbrace{(x-1)(x-2)(0)}^{\text{صفر}} + (x-1)(x-2)(x-4)\left(-\frac{1}{42}\right)$$

$$= -1 + 2x - \frac{1}{42}(x-1)(x-2)(x-4)$$

تابع درجه سوم است

چون ۴ نقطه به ما دادیم پس یک تابع درجه ۳ بدست آمده

فرمول خطا نیوتن

$$E(x) = \frac{(x-x_0)\ \dots\ (x-x_n)}{(n+1)!}$$

مانند خطای لاگرانژ است

$\|E\|_\infty$ حداکثر خطا

نرم بی نهایت

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

Ex: چند جمله‌ای درون‌یاب نیوتون و حداکثر خطا؟

x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
۵	۰/۶۹۸۹۷			
		۰/۰۷۹۱۸		
۶	۰/۷۷۸۱۵		−۰/۰۰۵۵۷	
		۰/۰۶۲۴۷		۰/۰۰۰۴۵
۸	۰/۹۰۳۰۹		−۰/۰۰۳۷۷	
		۰/۰۵۱۱۵		
۹	۰/۹۵۴۲۴			

$$\operatorname{Log} x = \frac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{Ln} ۱۰}$$

$$P(x) = ۰/۶۹۸۹۷ + ۰/۰۷۹۱۸(x-۵) - ۰/۰۰۵۵۷(x-۵)(x-۶)$$
$$+ ۰/۰۰۰۴۵(x-۵)(x-۶)(x-۸)$$

$$E(x) = \frac{(x-۵)(x-۶)(x-۸)(x-۹)}{۴!} f^{(۴)}_{\xi(x)}$$

$$f = \operatorname{Log} x = \frac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{Ln} ۱۰} \qquad f' = \frac{\frac{۱}{x}}{\operatorname{Ln} ۱۰} \qquad f'' = \frac{\frac{-۱}{x^۲}}{\operatorname{Ln} ۱۰}$$

$$f''' = \frac{-۲x^{-۳}}{\operatorname{Ln} ۱۰} \qquad f^{(۴)} = \frac{۱۲x^{-۵}}{\operatorname{Ln} ۱۰}$$

می‌خواهیم در بازه [۵و۹] ماکزیمم خطا را به دست آوریم

$$\max f^{(۴)} = \frac{۱۲\,(۵)^{-۵}}{\operatorname{Ln} ۱۰}$$

اکنون می‌خواهیم ماکزیمم $g = (x-۵)(x-۶)(x-۸)(x-۹)$ را بدست آوریم

تا خطا را از g مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم سپس اکسترمم آن به دست آید

البته باید در بازه [۵و۹] اتفاق افتد

$$\max E(x) = ۰/۶۹۴۸۶ \times ۱۰^{-۳}$$

$\boxed{}$

Δf_i پیشرو

∇f_i پسرو

تفاضلات متناهی

در صورتی که فاصله نقاط (x_i و x_{i+1} یکسان باشد ($h = x_{i+1} - x_i$ است

از تفاضلات متناهی استفاده می‌کنیم

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta f_{i+1} = f_{i+2} - f_{i+1}$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i = (f_{i+3} - 2f_{i+2} + f_{i+1}) - (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) =$$

$$= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

این فرمول ها حالت بازگشتی دارند

تفاضلات پسرو

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla f_i - \nabla f_{i-1} = (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$\nabla^3 f_i = \nabla^2 f_i - \nabla^2 f_{i-1} = (f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}) - (f_{i-1} - 2f_{i-2} + f_{i-3}) =$$

$$f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

جدول پیشرو

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	f_0			
		Δf_0		
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$	
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$	
		Δf_2		
x_3	f_3			

Note: $\nabla f_0 = \nabla f_1$ $\quad \Delta^2 f_1 = \nabla^2 f_3$

x	$f(x)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
x_0	f_0			
		∇f_1		
x_1	f_1		$\nabla^2 f_2$	
		∇f_2		$\nabla^3 f_3$
x_2	f_2		$\nabla^2 f_3$	
		∇f_3		
x_3	f_3			

Date: / / Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri. Subject:

روش نیوتون رافسون NR

برای حل عددی یک معادله $f(x)=0$ یا محاسبه ریشه آن استفاده می‌شود ابتدا بازه $[a,b]$ را طوری می‌یابیم که $f(a).f(b)<0$ باشد سپس $x_0\in[a,b]$ اختیار کرد

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

شرط توقف $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$

ε خطای قابل قبول که می‌تواند $\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

روش Δ^2 اتیکن استیفنسن

یک روش تکراری برای حل معادله $f(x)=0$ و یا پیدا کردن ریشه $f(x)$ می‌باشد

x_{n+2} یا hat

① $$\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} = x_n-\frac{\Delta x_n}{\Delta^2 x_n}$$ Note

شرط توقف $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$

از یک نقطه اولیه x_0، $x_0\in[a,b]$ شروع می‌شود که $f(a).f(b)<0$ باشد

سپس $x_1=g(x_0)$ (g همان تابع نقطه ثابت)

سپس $x_2=g(x_1)$ بدست آورد و برای محاسبه x_3 در فرمول ① قرار می‌دهیم

$$x_3=x_0-\frac{(x_1-x_0)^2}{x_2-2x_1+x_0}$$

زیرا این روش سه نقطه اولیه لازم دارد

x_0 را از $[a,b]$ انتخاب کرده

$x_1=g(x_0)$ و $x_2=g(x_1)$ را به این صورت بدست می‌آوریم

Ex: ریشه منفی $x^2-x-2=0$ به روش Δ^2؟

$x_0=-1.5$, $[-2.5 , -1.5]$

$f(2.5)=(-2.5)^2+(-2.5)-2>0$

$f(-1/5) = (-1/5)^2 + (-1/5) - 2 < 0$

$f(-2/5) \cdot f(-1/5) < 0$

پس $x_0 = -1/5 \in [-2/5 , -1/5]$

اکنون تابع $g(x)$ را پیدا می‌کنیم $x^2 = 2 - x$

$x = \frac{2-x}{x} = \frac{2}{x} - 1 = g(x)$

$|g'(x)| = \left|\frac{-2}{x^2}\right| < 1 \qquad x \in [-2/5 , -1/5]$

$x_1 = g(x_0) = g(-1/5) = \frac{2}{-1/5} - 1 = -2/3333$

$x_2 = g(x_1) = g(-2/3333) = \frac{2}{-2/3333} - 1 = -1/85714$

در فرمول ① گذاشتیم

$$x_3 = -1/5 - \frac{(-2/3333 - (-1/5))^2}{-1/85714 - 2(-2/3333) + (-1/5)} = -2/03030$$

مرحله دوم مثال: که نهایت x_3 را به جای x_0 اولیه، جایگذاری کرده سپس $x_1 = g(x_0)$ و $x_2 = g(x_1)$

بدست آید در نهایت x_3 جدید بدست آید و تا زمانی ادامه می‌یابد که $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

روش نقطه ثابت

n	x_n	e_n خطا
۲	$-1/85714$	$0/1429$
۳	$-2/0769$	$0/0769$
۴	$-1/9630$	$0/0370$
⋮		
۱۲	$-1/9999$	$0/0001$

n	x_n	e_n
۱	$-2/0303$	$0/0303$
۲	$-2/00007$	$0/00007$
۳	-2	0

EX: به روش NR ریشه $f(x) = x^4 - x - 10$ را بیابید

بازه [۱،۲] برای ریشه مثبت و $x_0 = 2$

بازه [-۱،-۲] برای ریشه منفی $x_0 = -1.5$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - x_n - 10}{4x_n^3 - 1}$$

برای بازه [۱،۲] و $x_0 = 2$

$$x_1 = 2 - \frac{2^4 - 2 - 10}{4(2^3) - 1} = 1.870968$$

$$x_2 = 1.87096 - \frac{(1.870968)^4 - (1.870968) - 10}{4(1.870968)^3 - 1} = 1.855781$$

برای ریشه مثبت

n	x_n
0	2
1	1.870968
2	1.855781
3	1.855585
4	1.855585

n	x_n
0	-1.5
1	-1.734069
2	-1.698745
3	-1.697473
4	-1.697473

روش نیوتن تعمیم یافته (برای ریشه تکراری)

برای $f(x) = (x-\alpha)^m$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m\, f(x_n)}{f'(x_n)}$$

این روش سرعت همگرایی آن از NR معمولی بیشتر است

SEPANTA

۱۸ و ۲۰ و ۲۱ یکیشو پاسخ باشد

Ex: به روش NR تقریب یابید؟

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2-2)^2 = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$$

ریشه $\sqrt{2}$ با تکرار ۲ ، ریشه $-\sqrt{2}$ با تکرار ۲

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(x_n^4 - 4x_n^2 + 4)}{4x_n^3 - 8x_n}$$

$x_0 = 1/5$

n	x_n	خطا e_n
0	۱٫۵	$۸٫۵۷۸۶۴۴ \times 10^{-2}$
1	۱٫۴۱۶۶۶۶۷	$۲٫۴۵۰۳۴۶۵ \times 10^{-3}$
2	۱٫۴۱۴۲۱۵۶	$۲٫۱۲۱۵۴۴ \times 10^{-6}$
3	۱٫۴۱۴۲۱۴	$۲٫۴۲۰۳۲۴ \times 10^{-8}$

$e_n = $ | جواب دقیق - جواب تقریبی |

روش وتری

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Ex: تقریب برای $\sqrt{2}$ ($x^2 - 2 = 0$)

$x^2 = 2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f(x) = x^2 - 2$

$[a, b] = [1, 2/5]$

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$

این دو نقطه را خودمان در $[a, b]$ اختیار می‌کنیم

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

جلسه ۴

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

در این فصل، بدون آنکه ضابطه تابع F را داشته باشیم و با توجه به

جدول نقاط $\begin{array}{c|c} x_i & \\ \hline f_i & \end{array}$ مشتق تابع را محاسبه می کنیم و می توان انتگرال

تابع را نیز بدون داشتن ضابطه محاسبه کرده (در بازه $[a,b]$)

روش های مشتق گیری عددی:
- پیشرو نیوتن: Δf_i
- پسرو نیوتن: ∇f_i

۱) در صورتی که فاصله نقاط x_i و x_{i+1} برابر باشند (h)

روش پیشرو نیوتن: می دانیم درون یاب پیشرو نیوتن به صورت زیر است

$$① \; P(x_0) \simeq f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

که $s = \frac{x-x_0}{h}$

اگر از ① مشتق نسبت به x گرفته $(ds = \frac{1}{h}dx)$ (if $x = x_0 \to s = 0$)

و پس از ساده سازی داریم

در نقطه x_0

$$P'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{2} + \frac{\Delta^3 f_0}{3} - \dots\right)$$

- روش پسرو نیوتن برای مشتق گیری عددی

$$P(x_n) \simeq f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s-1)}{2!}\nabla^2 f_n + \dots$$

و با مشتق گیری از رابطه بالا داریم (ساده سازی)

$$P'(x_n) \simeq \frac{1}{h}\left(\nabla f_n + \frac{\nabla^2 f_n}{2} + \frac{\nabla^3 f_n}{3} + \dots\right)$$

Note: فرمول دو نقطه ای مشتق پیشرو

۲ نقطه $f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}(\Delta F_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$

فرمول سه نقطه‌ای

۳ نقطه $f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{2}\right) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h}$

$\Delta f_0 \rightarrow F_1 - F_0$

$\frac{\Delta^2 f_0}{2} \rightarrow \frac{F_2 - 2F_1 + F_0}{2}$

فرمول ۴ نقطه‌ای پیشرو

$f'(x) \simeq \frac{2f_3 - 9f_2 + 18f_1 - 11F_0}{6h}$

Ex: مقادیر تابع F بصورت جدول زیر داده شده مقدار $f'(1.3)$ را بیابید

x	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1
$f(x)$	3.669	4.482	5.474	6.686	8.166

حل:

$h = 1.5 - 1.3 = 0.2$

x	$f(x)$	ΔF	$\Delta^2 F$	$\Delta^3 F$	$\Delta^4 F$
$x_0 = 1.3$	3.669	0.813	0.179	0.041	0.007
$x_1 = 1.5$	4.482	0.992	0.220	0.048	
$x_2 = 1.7$	5.474	1.212	0.268		
$x_3 = 1.9$	6.686	1.480			
2.1	8.166				

$$f'(1.3) = f'(x_0) \simeq \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{2} + \frac{\Delta^3 f_0}{3} - \frac{\Delta^4 f_0}{4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{0.2}\left(0.813 - \frac{0.179}{2} + \frac{0.041}{3} - \frac{0.007}{4}\right) = 3.677$$

اگر از فرمول ۴ نقطه‌ای پیشرو استفاده کنیم

$$f'(x_0 = 1.3) \simeq \frac{2f_3 - 9f_2 + 18f_1 - 11f_0}{6h}$$

$$= \frac{2(6.686) - 9(5.474) + 18(4.482) - 11(3.669)}{6(0.2)} = 0.5390$$

اگر $f(x)=e^{x}$ تابع واقعی باشد $f'(x)=e^{x}$

$$\text{خطا} = 0.0222 = \left|\underbrace{f'(1.3)}_{3.6477} - \underbrace{e^{1.3}}_{3.6699}\right|$$

هرچه خطا کمتر باشد روش دقیق‌تر است

Ex: اگر جدول زیر را داشته باشیم $f'(0.1)$؟

x	$x_0=0.1$	$x_1=0.2$	$x_2=0.3$	$x_3=0.4$
$f(x)$	2.1552	2.1573	2.149	2.1459

$h=0.1$

حل: با فرمول ۴ نقطه‌ای داریم

$$f'(0.1)=\frac{2f(0.4)-9f(0.3)+18f(0.2)-11f(0.1)}{6h}=0.013165$$

Ex: جدول زیر سرعت موشکی پس از پرتاب را نشان می‌دهد شتاب موشک در $t=240$ محاسبه کنید

sec t	0	60	120	180	240
$\frac{mile}{sec}$ h	0	0.0824	0.2747	0.6502	1.3854

حل: چون شتاب، مشتق سرعت است پس از مشتق‌گیری عددی استفاده می‌کنیم و چون $t=240$ شتاب مدنظر است پس از پسرو می‌رویم

t	$v(t)$	∇v	$\nabla^2 v$	$\nabla^3 v$	$\nabla^4 v$
0	0				
		0.0824			
60	0.0824		0.1099		
		0.1923		0.0733	
120	0.2747		0.1832		0.1029
		0.3758		0.1762	
180	0.6502		0.3596		
		0.7349			
240	1.385				

$$v'(240) \simeq \frac{1}{h}\left(\nabla v_n + \frac{\nabla^2 v_n}{2} + \frac{\nabla^3 v_n}{3} + \frac{\nabla^4 v_n}{4} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{40}\left(0.7349 + \frac{0.3596}{2} + \frac{0.1742}{3} + \frac{0.1029}{4}\right) = 0.01665$$

note تحلیل خطا در مشتق‌گیری عددی

$$E(x) = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

از فرمول خطا درون‌یابی مشتق نسبت به s گرفته و ساده‌سازی کرده

$$E'(x_0) = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi)$$

مشتقات مرتبه دوم

اگر از پیشرو مشتق دوم بگیریم داریم:

$$f''(x_0) \simeq \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \Delta^4 f_0 - \dots\right)$$

برای حالت پسرو نیز داریم:

$$f''(x_n) \simeq \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n + \nabla^4 f_n + \dots\right)$$

فرمول ۳ نقطه‌ای مشتق دوم (حفظ نشود)

$$f''(x_0) \simeq \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

فرمول ۴ نقطه‌ای

$$f''(x_0) \simeq \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{h^2}$$

		x_0	x_1	x_2	x_3
x	1.3	1.5	1.7	1.8	2.1
$f(x)$	3.669	4.482	5.474	9.486	8.166

در این صورت $f''(1.5)$ ؟

$$f''(1.5) = \frac{f(1.9) - 2f(1.7) + f(1.5)}{(0.2)^2} = 5.5 \qquad h = 0.2$$

$$f''(1.5) = \frac{-f(2.1) + 4f(1.9) - 5f(1.7) + 2f(1.5)}{(0.2)^2} = 4.3$$

هر چه تعداد جملات بیشتر باشد (در فرمول) آن روش دقیق‌تر است

فرمول مشتق دوم با استفاده از تیلور

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \qquad f''(x_i) \simeq \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$\begin{cases} f_i = f(x_i) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}) \\ f_{i-1} = f(x_{i-1}) \end{cases}$$

$$f'''(x_i) \simeq \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_i) \simeq \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4}$$

فرمول مشتق از $O(h^4)$

$$f'(x_i) \simeq \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h}$$

$$f''(x_i) \simeq \frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{12h^2}$$

$$f'''(x_i) \simeq \frac{-f_{i+3} + 8f_{i+2} - 13f_{i+1} + 13f_{i-1} - 8f_{i-2} + f_{i-3}}{8h^3}$$

برون‌یابی ریچاردسون

ابتدا فرمول های زیر را بر حسب $\frac{h}{2}$ و h نوشته

$$Q(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

$$Q(\tfrac{h}{2}) = \frac{f(a+\frac{h}{2}) - f(a-\frac{h}{2})}{h}$$

پس

$$f'(a) = \frac{4Q(\frac{h}{2}) - Q(h)}{3}$$

EX: برای $f(x) = e^x$ ، $f'(2)$ ؟ $h = 0.2$

$\frac{h}{2} = 0.1$

x	1.8	1.9	2	2.1	2.2
$f(x)$	6.0496	6.6859	7.3891	8.1662	9.0250

$f(2.1)$ $f(1.9)$

$$Q(\tfrac{h}{2}) = \frac{f(2+\frac{h}{2}) - f(2-\frac{h}{2})}{0.2} = \frac{8.1662 - 6.6859}{0.2} = 7.4015$$

$$Q(h) = \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2(0.2)} = \frac{f(2.2) - f(1.8)}{0.4} = \frac{9.0250 - 6.0496}{0.4} =$$

$$= 7.4385$$

$$f'(2) = \frac{4Q(\frac{h}{2}) - Q(h)}{3} = \frac{4(7.4015) - 7.4385}{3} = 7.3892$$

مقدار تقریبی برای f' در نقطه 2

$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(2) = e^2$

مقدار دقیق مشتق در $x=2$ برای خطا، مقدار تقریب را منهای مقدار دقیق کرد

روش های عددی برای انتگرال گیری $\int_a^b f(x)\,dx$

فرض کنیم بخواهیم انتگرال $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx$ را محاسبه کنیم

چون این انتگرال دشوار است زمان زیادی برای محاسبه می‌برد بدین دلیل از روش های عددی

(تقریب می‌زنیم) برای محاسبه این انتگرال های دشوار استفاده می کنیم

$h=b-a$

a b

روش ذوزنقه ساده

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

در روش ذوزنقه ساده $[a,b]$ را تقسیم بندی نمی‌کند، که خطا $-\frac{h^3}{2} f''(\xi)$ می باشد

روش ذوزنقه مرکب بازه $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می کند

$h=\frac{b-a}{n}$

a b

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\dots+f(b)\right]$$

که خطای آن $-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$

روش سیمپسون ساده $h=\frac{b-a}{2}$

a a+h b
h

بازه $[a,b]$ را به ۲ قسمت مساوی تقسیم می کند

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(a)+4f(a+h)+f(b)\right)$$

که خطای آن $-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

$h=\frac{b-a}{2n}$

روش سیمپسون مرکب — بازه $[a,b]$ را به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کند

$a \quad a+h \quad b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+\dots+f(b)\right)$$

که خطای آن $-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$

Ex: اگر $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$

الف) تقریبی با روش ذوزنقه $h=0.25$

ب) یک کران بالا برای خطا

$E < \frac{1}{2}\times 10^{-6}$

ج) اگر بخواهیم تقریبی برای انتگرال با ۶ رقم اعشار درست بدست آوریم بازه $[0,1]$ را حداقل به چند زیربازه باید تقسیم کنیم؟

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)=e^{-x^2}$	1	0.93941	0.77880	0.56978	0.36788

الف) ذوزنقه مرکب $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

$$h=\frac{b-a}{n} \Rightarrow 0.25=\frac{1}{4}=\frac{1}{n} \Rightarrow n=4$$

$0 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1$

$$\frac{h}{2}\left(f(0)+2f(0.25)+2f(0.5)+2f(0.75)+f(1)\right)=$$

$$\frac{0.25}{2}\left(1+2(0.93941)+2(0.77880)+2(0.56978)+0.36788\right)=0.74298$$

ب) $f=e^{-x^2} \longrightarrow f'=(-2x)e^{-x^2}$

$$f''=(-2e^{-x^2})+(-2x)(-2xe^{-x^2}) \qquad f''(0)=-2e^0+0=(-2)$$

$$|E|=\left|\frac{-h^2}{12}(b-a)f''(\xi)\right| \le \left|\frac{-(0.25)^2}{12}(1-0)\underbrace{\max f''(\xi)}_{|-2|}\right|=\frac{1}{96}$$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n}$ $\qquad |E| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ ج

$$\left| -\frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

مقدار max f'' برابر ۲ است

$$\left| \frac{1}{\cancel{12}_{6}\, n^2}(2) \right| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} \implies \frac{1}{6n^2} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\to 6n^2 \geq \frac{1}{\frac{1}{2} \times 10^{-4}} = 2 \times 10^4$$

$$\to n^2 \geq \frac{2 \times 10^4}{6} = \frac{1}{3} \times 10^4 \longrightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{3} \times 10^4}$$

حداقل n را لازم داریم

$$n = \left[\sqrt{\frac{1}{3} \times 10^4} \right] + 1 = ۵۷ + ۱ = ۵۸$$

روش نقطه میانی [ساده / مرکب

a ———— b

میانی ساده $\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

در روش میانی ، نقطه اول $f(a)$ و نقطه آخر $f(b)$ را حذف می کند

میانی مرکب $\quad h = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + (i - \frac{1}{2})h \qquad i = 1, 2, \dots, n$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left[f(x_1) + \dots + f(x_n)\right]$$

خطا میانی ساده $\quad \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$

خطا میانی مرکب $\quad \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi)$

Ex: اگر $\int_{1.2}^{1.6} F(x)\,dx$ مدنظر باشد

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
$f(x)$	0.1823216	0.2623642	0.3364722	0.4054651	0.4700036

اگر $F(x)=\ln x$ باشد سیمپسون مرکب را محاسبه کنید؟ $a=1.2 \quad b=1.6$

$$\frac{h}{3}\left[F(1.2)+4F(1.3)+2F(1.4)+4F(1.5)+F(1.6)\right]$$

$$h=\frac{b-a}{2n}=\frac{1.6-1.2}{2n}=\frac{0.4}{2n}=0.1 \quad n=2$$

$$\frac{0.1}{3}\left[0.1823216+4(0.2623642)+2(0.3364722)+4(0.4054651)+0.4700036\right]=0.1332195$$

ماکزیمم خطا مرکب سیمپسون $\left|-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi)\right| = \left|\frac{(1.6-1.2)}{180}(0.1)^4\right|\underbrace{\max|f^{(4)}(\xi)|}_{\frac{6}{(1.2)^4}} =$

6.4304×10^{-7}

$F=\ln x \qquad F'=\frac{1}{x}=x^{-1} \qquad F''=(-1)x^{-2} \qquad F'''=(-1)(-2)x^{-3}$

$$|F^{(4)}|=|(-1)(-2)(-3)x^{-4}|=|6x^{-4}|=\left|\frac{6}{x^4}\right|=\frac{6}{(1.2)^4} \quad \square$$

Ex: مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ به روش میانی؟ $h=0.1$ $\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$

$x_i=a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h \qquad i=1,\dots,n$

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{n}=0.1 \rightarrow n=10$

0   0.1   0.2   0.3 1

$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ex

$x_1 = 0 + (1 - \frac{1}{2}) h = \frac{1}{2} h = \frac{0/1}{2} = \frac{1}{20}$

$x_2 = 0 + (2 - \frac{1}{2}) h = \frac{3}{2} h = \frac{3}{2}(0/1) = \frac{3}{20}$

$x_3 = 0 + (3 - \frac{1}{2}) h = \frac{5}{2} h = \frac{5}{20}$ $x_{10} = 0 + (10 - \frac{1}{2}) h = \frac{19}{20}$

میانی مرکب $h\left[F(\frac{1}{20}) + F(\frac{3}{20}) + F(\frac{5}{20}) + \dots + F(\frac{19}{20})\right]$

$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{20}}}$ $\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{20}}}$

خطا $\frac{(b-a)h^2}{24} F''(\xi) = 0$ $h = 0/1$

$f = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$ $F' = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) x^{-\frac{3}{2}}$ $F'' = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) x^{-\frac{5}{2}}$ $\square$

درس نداریم

Note برای محاسبه انتگرال زیر می‌توان از GL ۲ نقطه‌ای یا GL ۳ نقطه‌ای استفاده کنیم

① $\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$

GL ۲ نقطه‌ای $\int_{-1}^{1} F(x)\,dx \simeq F(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + F(\frac{1}{\sqrt{3}})$

GL ۳ نقطه‌ای $\int_{-1}^{1} F(x)\,dx \simeq \frac{5}{9} F(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} F(0) + \frac{5}{9} F(\sqrt{\frac{3}{5}})$

Note: اگر $\int_a^b F(x)\,dx$ باشد باید $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}$ و تغییر متغیر داد

$dx = (\frac{b-a}{2}) dt$ و در انتگرال $\int_a^b F(x)\,dx$ می‌گذاریم

Ex $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ را GL ۳ نقطه‌ای ؟

$$x = \frac{1-0}{2}t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \qquad dx = \frac{1}{2}\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{5}{9}\left[\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{1}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2}\right) + \frac{8}{9}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2}\right] + \right.$$

$$\left.\frac{5}{9}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{1}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2}\right].\right] = 1.57053 \quad \square$$

روش رامبرگ: یک روش تقریبی در محاسبه انتگرال گیری عددی است.

T_1 ذوزنقه ساده

T_2 به دو قسمت تقسیم

T_4 به ۴ قسمت تقسیم

T_8 به ۸ قسمت

مرحله (۱):

$$T_2^{(1)} = \frac{4T_2 - T_1}{3}$$

$$t_4^{(1)} = \frac{4t_4 - T_2}{3}$$

$$t_8^{(1)} = \frac{4T_8 - T_4}{3}$$

مرحله (۲):

$$T_4^{(2)} = \frac{4^2 T_4^{(1)} - T_2^{(1)}}{15}$$

$$T_8^{(2)} = \frac{4^2 T_8^{(1)} - T_4^{(1)}}{15}$$

$$T_8^{(3)} = \frac{4^3 T_8^{(2)} - T_4^{(2)}}{63}$$

Ex) مقدار تقریبی انتگرال $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx$ به روش رامبرگ؟

$h=1$

$0 \quad 1$

$$T_1 = \frac{h}{2}\left(f(0)+f(1)\right) = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{4} = 0.75$$

$h=\frac{1}{2}$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$

$$T_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left(f(0)+2f(\tfrac{1}{2})+f(1)\right) = 0.81944$$

$h=\frac{1}{4}$

$0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{4} \quad 1$

$$T_4 = \frac{\frac{1}{4}}{2}\left(f(0)+2f(\tfrac{1}{4})+2f(\tfrac{2}{4})+2f(\tfrac{3}{4})+f(1)\right) = 0.83170$$

$h=\frac{1}{8}$

$0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{2}{8} \quad \dots \quad 1$

$$T_8 = \frac{h}{2}\left(f(0)+2f(\tfrac{1}{8})+2f(\tfrac{2}{8})+\dots+2f(\tfrac{7}{8})+f(1)\right) = 0.83467$$

$$T_2^{(1)} = \frac{4T_2 - T_1}{3} = \frac{4(0.81944) - (0.75)}{3} = 0.84259$$

$$T_4^{(1)} = \frac{4T_4 - T_2}{3} = 0.83579$$

$$T_8^{(1)} = \frac{4T_8 - T_4}{3} = 0.83566$$

$$T_4^{(2)} = \frac{16T_4^{(1)} - T_2^{(1)}}{15} = 0.83533$$

$$T_8^{(2)} = \frac{16 T_8^{(1)} - T_4^{(1)}}{15} = 0.835958$$

$$T_8^{(3)} = \frac{64 T_8^{(2)} - T_4^{(2)}}{63} \doteq 0.835466$$

تمرین برای انتگرال

فصل ۵ (روش های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل)

روش سری تیلور :

$$y(x) \simeq y(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \dots$$

Ex) $y' = x^2 + y^2$ | از $x=0$ تا $x=0.2$ (یک سر طول)

$y(0)=1 \rightarrow y_0 = 1$ | $h=0.1$ از تیلور مرتبه ۳

حل

0   0.1   0.2

$$y'(0) = 0^2 + [y(0)]^2 = 1^2 = 1$$

مشتق جدا

جدا

$$y'' = 2x + 2y'y$$

$$y''(0) = 2(0) + 2[y'(0)][y(0)] = 2(1)(1) = 2$$

$$y''' = 2 + 2y''y + 2y'y'$$

$$y'''(0) = 2 + 2y''(0)y(0) + 2[y'(0)]^2 = 2 + 2[2][1] + 2[1]^2 = 2+4+2 = 8$$

$$y(0.1) = y(0) + \frac{(0.1-0)}{1!} y'(0) + \frac{(0.1-0)^2}{2!} y''(0) + \frac{(0.1-0)^3}{3!} y'''(0)$$

$$y(0.1) = 1 + \frac{0.1}{1}(1) + \frac{(0.1)^2}{2}(2) + \frac{(0.1)^3}{6} 8 = 1.111333$$

(مرار ۲ از)

$$y'(0.1) = (0.1)^2 + [y(0.1)]^2 = 1.245041$$

$$y''(0.1) = 2(0.1) + 2y'(0.1)\,y(0.1) = 2.962358$$

$$y'''(0.1) = 2 + 2y''(0.1)\,y(0.1) + 2[y'(0.1)]^2 = 11.469579$$

$$y(0.2) = y(0.1) + \frac{(0.2-0.1)}{1!}y'(0.1) + \frac{(0.2-0.1)^2}{2!}y''(0.1) + \frac{(0.2-0.1)^3}{3!}y'''(0.1)$$

$$= 1.252326 \ \square$$

(روش اویلر)

$$y_{i+1} = y_i + h\underbrace{f(x_i, y_i)}_{(y'=f)}$$

سرعت اویلر بالاتر از تیلور است.

EX) $y' = y + x^2 = f$, $y(0)=1$, $0 \le x \le 1$, $h=0.2$ با روش اویلر؟

حل:

$0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad \dots \quad 1$

$$y_1 = y(0) + 0.2[y(0) + 0^2] = 1 + 0.2[1] = 1.2$$

$$y_2 = y_1 + 0.2[y_1 + x_1^2] = 1.2 + 0.2[1.2 + (0.2)^2] = 1.4480$$

	y_k تقریبی	y دقیق
0.4	1.4480	1.5155
0.6	1.7694	1.9064
0.8	2.1955	2.4466
1	2.7626	3.1548

مقدار y دقیق از روش کتاب معادلات دیفرانسیل به دست می‌آوریم. $\square$

$$\underset{\text{معادله خطی}}{y' = y + x^2}$$

$$y' - y = \underbrace{x^2}_{g(x)} \rightarrow \mu = e^{-\int 1dx} = e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{\mu}\left[\int \mu g(x)\,dx + c\right] = \frac{1}{e^{-x}}\left[\underbrace{\int e^{-x}x^2\,dx + c}_{\text{جزء به جزء جدولی}}\right]$$

$\square$

$$Z_{k+1} = y_k + h f(x_k , y_k)$$ (اویلر بهسازی شده)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k , y_k) + f(x_{k+1} , z_{k+1}) \right]$$

سرعت اویلر بهسازی شده از اویلر بالاتر است.

EX) $y' = y + x^2 = f$ ، $y(0) = 1$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، $h = 0.1$

اویلر بهسازی شده؟

حل:

$$Z_1 = \overset{1}{y_0} + 0.1\left[\overset{1}{y(0)} + 0^2\right] = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$y_1 = \overset{1}{y(0)} + \frac{0.1}{2}\left[(\overset{1}{y(0)} + 0^2\right] + \left[\overset{1.1}{Z_1} + (1.1)^2\right] = 1.1055$$

x_k	Z_k	y_k
۰٫۲	۱٫۲۱۷۰	۱٫۲۲۴۱
۰٫۴	۱٫۵۰۴۳	۱٫۵۱۵۰
۰٫۶	۱٫۸۹	۱٫۹۰۵۲
۰٫۸	۲٫۴۱۲۵	۲٫۴۳۴۲
۱	۳٫۱۲۳۰	۳٫۱۵۰۴

$\square$

جلسه ۱۰ ام

حل عددی معادلات دیفرانسیل:

روش رانگ کوتای مرتبه ۲ RK2

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ k_1 = hF(x_i , y_i) \\ k_2 = hF(x_i+h , y_i+k_1) \end{cases}$$

مثال: جواب مسئله مقدار اولیه زیر به روش RK2 با $h=0.1$

$$\begin{cases} y' = y + x^2 = F \\ y(0) = 1 = y_0 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$n=10$ ، $0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ ، $0.1 = x_1$

مرحله اول

$$\begin{cases} k_1 = hF(0, y_0) = 0.1(1+0^2) = 0.1 \\ k_2 = hF(0+0.1 , \overbrace{y_0+k_1}^{1+0.1}) = 0.1[1.1 + (0.1)^2] = 0.111 \\ y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1+k_2) = 1 + \frac{1}{2}(0.1 + 0.111) = 1.1055 \end{cases}$$

مرحله دوم

$$\begin{cases} k_1 = hF(0.1 , \overbrace{y_1}^{1.1055}) \\ k_2 = hF(\underbrace{0.1}_{x_1} + \underbrace{0.1}_{h} , y_1+k_1) \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1+k_2) = 1.2241 \end{cases}$$

مرحله k	y_k تقریبی	Y واقعی
		1.5155 (در نقطه 0.4)
4	1.5150	1.9044
6	1.9052	2.4366
8	2.4542	3.1548
10	3.1504	

روش رانگ کوتای مرتبه ۴ (حفظ شود) RK4 دقیق‌تر از RK4 است

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$