

دایره ها نه در دایره مخرج x و y ها این است - مثل در بیض نیست -

$$x^2 + y^2 = 1$$

دایره به شعاع یک

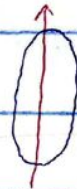
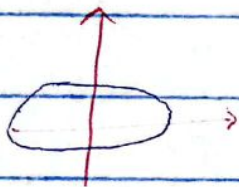
$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (R > 0)$$

دایره به شعاع R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

دایره به مرکز (x_0, y_0) و شعاع R

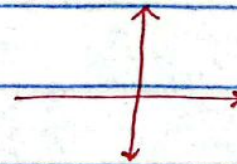
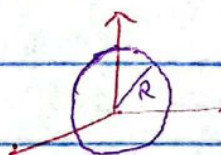
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (a \neq b)$$



دایره بیض در فضای R^2 (محضی x و y) قسم در فضای R^3 است - دایره به مرکز تبدیل

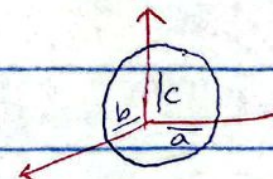
می شود که بیض به بیض تبدیل می شود

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

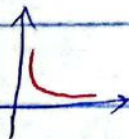


$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

بیض سه بعدی:



$$x^2 - y^2 = 1$$

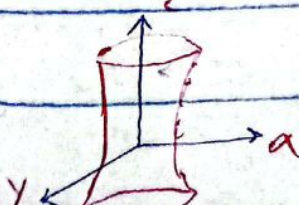


هذلولی

هذلولی توپ به یک پارچه (در فضای R^3)

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

این سواد ها می باشد - افق دار و توسط هذلولی و بیض



هندسه گویا دو پارچه

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = -1$$

$$\textcircled{1} \frac{-(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = +1$$

این معادله ها به یکدانش با بقیه متفاوت است - از وسط هندسه گویا

چونند و مرکز آن (x, y, z)

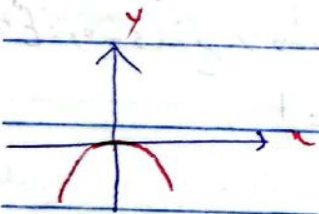
$$\text{if } z=z_0 \xrightarrow{\text{در فصول}} \textcircled{1} -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$$

نه غیر قابل قبول

$$\text{if } y=y_0 \xrightarrow{\text{در فصول}} \textcircled{1} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

$$\text{if } x=x_0 \xrightarrow{\text{در فصول}} \textcircled{1} \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$

مانند هندسه



دو مانده سهمی به سمت منفی (یا مثبت) می تواند یک دارد نه در این جا y است

$$y = -x^2$$



سهمی

$$y = x^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سهمی در (R^3)

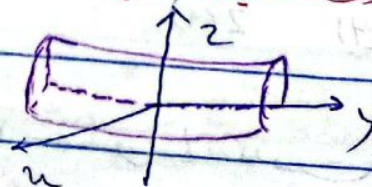
دو مانده سهمی در یک صفحه است [چون توان یک دارد] اگر c و b باشد به سمت z ها می کشند



اگر c و b باشد به سمت z ها می کشند

$$\textcircled{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

هندسه گویا سهمی (ریبن است)



این که توان یک دارد و دیرین است (به اینها 2) آنه علامت منفی دارد و توان 2 است از و سوارین است منفی ندارد

if $z = c \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ هنگامی است

if $y = b \rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} + 1$ سهمی است

if $z = -c \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

$\rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ هنگامی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



مخروط:

این متغیری که توان 2 دارد و علامتش منفی دارد باید طرف معادله است از و سوارین منفی ندارد

$x^2 - y^2 + z^2 = 2z + 1$ در معادله زیر را می بینیم که از معادله است

$\rightarrow x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 1 \rightarrow x^2 - y^2 + (z^2 - 2z) = 1$

$\rightarrow x^2 - y^2 + (z-1)^2 = 2$

$\rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{2} = 1$ هنگامی که توان یک دارد و سوارین است (اوجده)

به از و سوارین هنگامی که توان یک دارد و سوارین علامت آن متفاوت است

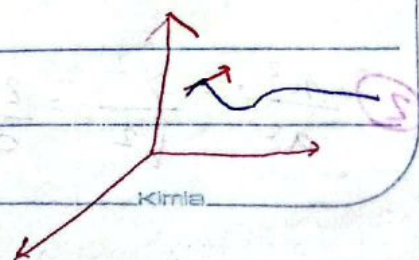
$$\frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(z-1)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

مثال: یک منحنی با معادله $r(t)$ نمایش می دهیم

$$r(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$x(t) \quad y(t) \quad z(t)$

$r'(t)$ مشتق r نسبت به t



$T(t)$ بردار معادس است برداری که بر منحنی $r(t)$ در نقطه t معادس است و طول آن یک واحد باشد

$$r'(t) = (1, 2, 2t) \quad r''(t) = (0, 2, 2)$$

انحنای منحنی $\uparrow$ یک ضلع را است - انحنای نوارده یا منفی است -

میزان خمیدگی منحنی در (طول K یا K کایا) نمایش می‌دهد

$$K = |r' \times r''|$$

E : ابتدا $r'(t) = (t, t^2, t^3)$ در نقطه $(0, 0, 0)$ $|r''|^3$ (در مطلق) یعنی اندازه

$$r' = (1, 2t, 3t^2) \quad t=0 \rightarrow (1, 0, 0)$$

$$r'' = (0, 2, 6t) \quad t=0 \rightarrow (0, 2, 0)$$

$$K = |(1, 0, 0) \times (0, 2, 0)|$$

$$|(0, 2, 0)|^3$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}^3$$

$$= i(0) - j(2) + k(2) = 2k$$

$$\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2 \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

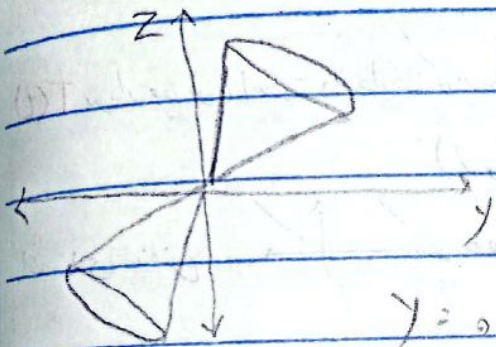
$$\frac{y^2}{f} + \frac{z^2}{g} = k^2$$

$$k=0 \rightarrow \frac{y^2}{f} + \frac{z^2}{g} = 0$$

$$k=+1 \rightarrow \frac{y^2}{f} + \frac{z^2}{g} = 1$$

$$k=+2 \rightarrow \frac{y^2}{f} + \frac{z^2}{g} = 4 \rightarrow \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$$

$$k=+3 \rightarrow \frac{y^2}{f} + \frac{z^2}{g} = 9 \rightarrow \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{18} = 1$$



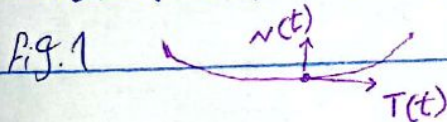
$$z = 0 \rightarrow \frac{y}{x} = x^2 \rightarrow y^2 = 4x^2$$

$$\rightarrow (y = 2x, y = -2x)$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{z}{x} = x^2 \rightarrow z^2 = 4x^2 \rightarrow (z = 2x, z = -2x)$$

$r(t)$ منحنی برداری باشد مولدهای آن بر حسب t است.

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$



$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

بردار بیان محاس

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \quad (t) \text{ به قائم اول به } T(t) \text{ عمود و جهت آن}$$

داخل منحنی است. بیرون خارج

$$B = T(t) \times N(t) \quad \text{جهت بیان}$$

برای نشان دست به سمت (t) به پس انداخته است دست به سمت B را غایب

میده. B یک بردار است [بردار نرمال صفحه مماس]

$$(a, b, c)$$

Review (یادآوری)

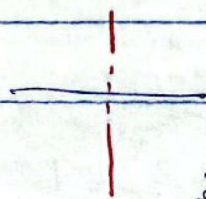
معادله صفحه

$$(a, b, c) \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

بردار نرمال (عمود بر صفحه) است و (x_0, y_0, z_0) نقطه ای است که از صفحه

انواع صفحه در فضا: صفحه موازی، صفحه عمود، صفحه متقاطع

Review انواع خط در فضا



دو صفحه متقاطع



دو صفحه متقاطع

موازی

Subject

$$K = |r' \times r''|$$

$$K = \frac{(y'')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$|r'|^3$$

$$K = \frac{|T'|}{|r'|}$$

Ex: انضای ساده $y = x^2$ در نقطه $x=2$

$$K = \frac{(y'')^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad y = x^2 \rightarrow y' = 2x \rightarrow y'' = 2$$

$$K = \frac{2}{(1+4)^{\frac{3}{2}}}$$

Ex: فرض کن $z = 3 \cos t$, $y = 4t$, $x = 3 \sin t$

Ex: فرض کن

بیان معادلات و مقایسه اول و B بویان را در $t=0$ محاسبه کنید

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}, \quad N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}, \quad B = T \times N$$

$$r(t) = (3 \sin t, 4t, 3 \cos t) \rightarrow r' = (3 \cos t, 4, -3 \sin t)$$

$$r'(0) = (3, 4, 0)$$

$$|r'(0)| = (\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}) = 5$$

$$T = \frac{r'(0)}{|r'(0)|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{(3 \cos t, 4, -3 \sin t)}{\sqrt{(3 \cos t)^2 + 4^2 + (-3 \sin t)^2}}$$

$$T(t) = \left(\frac{3}{5} \cos t, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \sin t\right)$$

$$T'(t) = \left(-\frac{3}{5} \sin t, 0, -\frac{3}{5} \cos t\right)$$

$$T'(0) = \left(0, 0, -\frac{3}{5}\right)$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5} \sin t\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{3}{5} \cos t\right)^2}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{(0, 0, -\frac{3}{5})}{\frac{3}{5}} = (0, 0, -1)$$

Subject

Date / /

$$B = T \times N$$

$$B = \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{array} \right| \cdot \frac{1}{K}$$

$$B = -\frac{1}{8}i + \frac{1}{8}j$$

صفحه پرستان را برای مثال قبول $t=0$ به دست آوریم.

$$x = 3 \sin t \rightarrow x=0$$

$$y = 4t \rightarrow y=0$$

$$z = 3 \cos t \rightarrow z=3$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0)$$

$$-\frac{1}{8}(x-0) + \frac{1}{8}(y-0) + 0(z-3) = 0$$

$$① y = t^n \rightarrow y' = nt^{n-1}$$

$$③ y = fg \rightarrow y' = f'g + fg'$$

$$② y = \frac{f}{g} \rightarrow y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$④ y = e^u \rightarrow y' = u' e^u$$

$$⑤ y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$⑥ y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$$

$$⑦ y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$⑧ y = \tan u \rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$⑨ y = \cot u \rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

$$⑩ \text{Arcsin } u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$⑪ \text{Arccos } u \rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$⑫ \text{Arctan } u \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$⑬ \text{Arccot } u \rightarrow y' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$⑭ y = \sin^n u \rightarrow y' = n u' \cos u \cdot \sin^{n-1} u$$

$$⑮ y = \cos^n u \rightarrow y' = -n u' \sin u \cdot \cos^{n-1} u$$

$$if = x^2 - y^2 - 2xyz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 0 - 2yz$$

$$\frac{df}{dx} = 0 - 2y - 2xz$$

مشتق نسبت به x

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 - 0 - 2xy$$

برای f دیتا

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

در $t=1$ در $v(t) = (\cos t, \sin t, t)$ بردار مماس $v'(t)$

$$v'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow v'(1) = (-\sin(1), \cos(1), 1)$$

$$|v'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$T(t) = \frac{v'(t)}{|v'(t)|} = \frac{(-\sin t, \cos t, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$T(1) = \frac{(-\sin 1, \cos 1, 1)}{\sqrt{2}}$$

$$|T(1)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\cos^2 1 + \sin^2 1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$N(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$N(1) = (-\cos 1, -\sin 1, 0)$$

$$B = T(t) \times N(t) =$$

$$\begin{vmatrix} +i & -j & +k \\ \frac{-\sin 1}{\sqrt{2}} & \frac{\cos 1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos 1 & -\sin 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$i\left(0 + \frac{\sin 1}{2}\right) - j\left(0 + \frac{\cos 1}{2}\right) + k\left(\frac{\sin^2(1)}{\sqrt{2}} + \frac{\cos^2(1)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v(1) = (\cos(1), \sin(1), 1)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\frac{\sin(1)}{2}(x - \cos(1)) - \frac{\cos(1)}{2}(y - \sin(1)) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z - 1) = 0$$

$$F_x = \frac{df}{dx}$$

مشتقات نسبت به x و تغییرات و تغییرات در راست

مشتقات نسبت به

$$F_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow \text{مشتقات نسبت به x و تغییرات و تغییرات در راست}$$

$$F_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \rightarrow \text{مشتقات نسبت به x و تغییرات و تغییرات در راست}$$

$$F_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \rightarrow \text{مشتقات نسبت به y و تغییرات و تغییرات در راست}$$

note: تفاوت در بعضی مشتقات نسبت

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\left. \frac{df}{dy} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ex: مشتقات زیر را به دست آورید

الف: $f = e^{xyz^2} - \sin(xyz^3)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$

ب: $f = \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$

ج: $f = xy^2 - \tan^{-1}(xy + z^3)$, $\frac{df}{dz}$, $\frac{df}{dy}$

د: $f = \tan(\sin(x^3y^2 - z^2))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$

$$\frac{df}{dx} = yz^2 \cdot e^{xyz^2} - yz^3 (\cos(xyz^3))$$

$$\frac{df}{dz} = 2xyz \cdot e^{xyz^2} - 3xyz^2 (\cos(xyz^3))$$

Subject.....

Date

$$-r x z^r (\cos(n y z^r)) + x z^r (\sin(n y z^r)) (r x y z^r)$$

$$\frac{df}{dn} = \left(\frac{\frac{y}{z}}{\frac{xy}{z}} \right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{df}{dy} = \left(\frac{\frac{x}{z}}{\frac{xy}{z}} \right) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{df}{dz, dy} = 0$$

$$\frac{df}{dz} = 0 - \frac{u'}{1+u^r} \rightarrow 0 - \frac{r z^r}{1+(ny+z^r)}$$

$$\frac{df}{dy} = r x y - \frac{x}{1+(ny+z^r)^r}$$

$$\frac{df}{dy} = 1 + \tan^r(\sin(n y^r - z^r)) \cos(n y^r - z^r) \times r x y$$

$$\frac{df}{dnydy} = r \tan(\sin(n y^r - z^r)) \cdot (\cos(n y^r - z^r))$$

$$r n^r y^r \cdot (\cos(n y^r - z^r)) \times r x y + \{ 1 + \tan^r(\sin(n y^r - z^r))$$

$$0 - \sin(n y^r - z^r) r n^r y^r \cdot r x y \} + \{ 1 + \tan^r(\sin(n y^r - z^r)) \cos(n y^r - z^r) \} \cdot r x y$$

فرض کنیم $z = r x + y^r$ و $r = 1$

$$f = x y z^r - \sin(r x + y^r)$$

$$\frac{df}{dx} = ? \quad \frac{df}{dy} = ?$$

$$\frac{df}{dy} = x r y z^r - r y \cos(r x + y^r)$$

$$\frac{df}{dyx} = r x y z^r - r \cos(r x + y^r)$$

Subject

Date

$$f = \ln\left(\frac{x+ry}{x^r y^r}\right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^r y^r - r x y^r (x+ry)}{(x^r y^r)^r} = \frac{(x^r y^r - r x^r y^r - r x y^r)}{x^r y^r (x+ry)}$$

$$= \frac{x^r y^r - r x y^r}{x^r y^r (x+ry)} = \frac{-x y^r (x y + r y^r)}{x^r y^r (x+ry)} = \frac{-(x y + r y^r)}{x y (x+ry)} = \frac{-x y - r y^r}{x y + r x y^r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{(-x - r y) \times (x^r y^r + r x y^r) - (x^r + r x y) \times (-x y - r y^r)}{(x^r y^r + r x y^r)^r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{r(x^r y^r) - r x^r y^r (x+ry)}{(x^r y^r)^r} = \frac{x+ry}{x^r y^r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad r x^r y^r - r x^r y^r - r x^r y^r$$

$$- r x^r y^r - r x^r y^r = \frac{x^r y^r (-r y - r x)}{x^r y^r (x+ry)} = \frac{-r y - r x}{y(x+ry)}$$

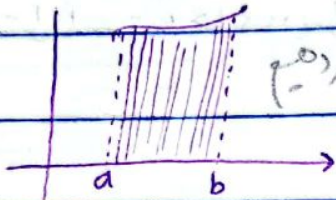
$$= \frac{-r y - r x}{y(x+ry)} = \frac{-r(yx + r y^r) - y(-r y - r x)}{(yx + r y^r)^r}$$

Subject

انتقال

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

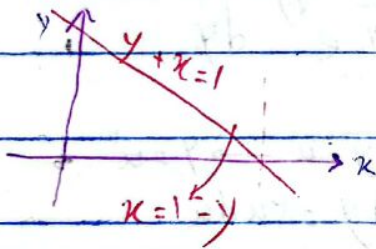
$$\int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

جای x ، a و b قرار دهیم

Ex. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy$ (جای دیفرانسیل ها را تعریف می دهیم)

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1-x \end{matrix} \rightarrow y = 1-x \rightarrow y+x=1 \quad \begin{matrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\int_0^1 (1-y-0) dy = y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

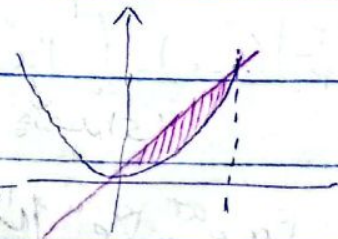


$$\int_0^1 \int_x^1 dy dx = ?$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ x^2 < y < x \end{matrix}$$

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^y dx$$

$$y = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$



Subject

Date

$$Ex. \int_0^1 \int_x^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} dy dx$$

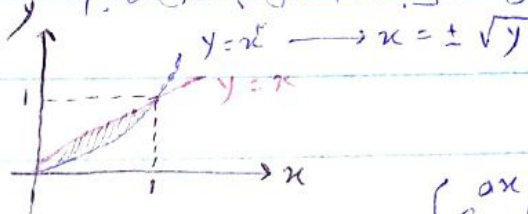
نکته: در انتگرال بیان به تغییر متغیر داریم در دو حالت ۱ تغییر متغیر

حل: چون لا در عرض سراسر است [انتگرال دایره نسبت به y است] پس انتگرال سری

دشواری است جای دین اوسیل ها [بارس] و عرض

$$0 \leq x \leq 1$$

$$x^2 \leq y \leq x$$



$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} \Big|_y^{\sqrt{y}} = \sqrt{y} (e' - e^{\sqrt{y}})$$

$$\int_0^1 \sqrt{y} (e' - e^{\sqrt{y}}) dy = \int_0^1 \sqrt{y} e' dy - \int_0^1 \sqrt{y} e^{\sqrt{y}} dy$$

$$\sqrt{y} = u \rightarrow y = u^2$$

$$dy = 2u du$$

$$e' \frac{y^{\frac{1}{r}+1}}{\frac{1}{r}+1} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} u e^u (2u du)$$

$$= e' \left(\frac{2}{3} \right) (1-0) - \int_0^1 2u^2 e^u du$$

نهایی و جداگانه

انتگرال	e^u
نسبت	$+2u^2$
	$-2u$
	$+2$
	0

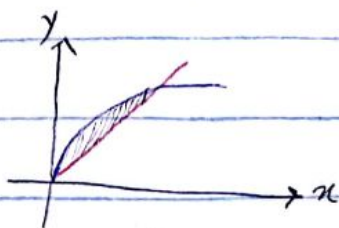
جواب انتگرال در

$$2u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \sin\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) dx dy : Ex$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$y^2 \leq x \leq y \rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$



$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) dy$$

$$n: \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

Subject

Date / /

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_0^1 \sqrt{x} [\cos 1 - \cos \sqrt{x}] du$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x} \cos 1 + \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$$

$\xrightarrow{\frac{-x}{\frac{1}{x}+1} \cos 1} \int_0^1 \frac{-x}{\frac{1}{x}+1} \cos 1 dx$
 $\quad \sqrt{x} = u \rightarrow x = u^2$
 $\quad dx = 2u du$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^1 u \cos u (2u du) = \int_0^1 2u^2 \cos u du$$

سین

$+ 2u^2$	$\cos u$	
$- 4u$	$\sin u$	$= 2u^2 \sin u + 4u \cos u - 4 \sin u \Big _0^1$
$+ 4$	$\cos u$	
$- 0$	$\sin u$	

$$\int_0^{\sqrt{e}} \int_0^{\sqrt{e-x}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$$

$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ dx dy = r dr d\theta \end{cases}$
 hint از تغییر قطب استفاده کنید

$$0 \leq x \leq \sqrt{e} \quad \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow r \cos \theta \geq 0 \rightarrow \cos \theta \geq 0 \\ x \leq \sqrt{e} \rightarrow r \cos \theta \leq \sqrt{e} \rightarrow r \leq \frac{\sqrt{e}}{\cos \theta} \end{cases}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (1)

$$0 \leq y \leq \sqrt{e-x} \quad \begin{cases} y \geq 0 \rightarrow r \sin \theta \geq 0 \rightarrow \sin \theta \geq 0 \\ y \leq \sqrt{e-x} \rightarrow \frac{y}{x} \leq \sqrt{e-x} \rightarrow \tan \theta \leq \sqrt{e-x} \rightarrow \theta \leq \arctan \sqrt{e-x} \end{cases}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (2)

(1) و (2) $\rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{e}}{\cos \theta}} \frac{1}{r} r dr d\theta$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{e}}{\cos \theta} d\theta = \sqrt{e} \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\iint (x^2 - y^2) dx dy$$

$$\begin{cases} x - y = \pm 1 \\ x + y = \pm 1 \end{cases}$$

$$x + y = u \rightarrow u = \pm 1$$

$$x - y = v \rightarrow v = \pm 1$$

$$\frac{du}{dx}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$\Rightarrow J = \frac{1}{|J|} = \frac{1}{2}$

$$dx dy = \left| \frac{du dv}{dr d\theta} \right| \rightarrow \frac{1}{r} du dv$$

متغیر قدیم (x, y) $\rightarrow$ متغیر جدید (r, θ)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

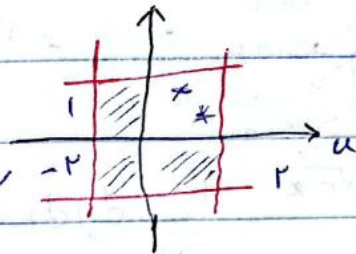
Not در محاسبات قطبی

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$dx dy = J dr d\theta = r dr d\theta$$

جواب سوال:

$$\iint (x-y)(x+y) dx dy = \iint \frac{1}{r} du dv$$



این مایه را محاسبه کرده در آخر ببرد

$$\int_0^2 du \int_0^2 u v \frac{1}{r} dr$$

مسئله درخواست شده زیر را به دست آورید؟

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2+y^2) dx dy$$

$$\iint \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dx dy$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$$

Not زمانی x^2+y^2 در تابع تحت انتگرال داشته باشیم از تغییر مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$J = r \frac{dx dy}{dr d\theta} = r dr d\theta$$

حل 1

$$0 \leq y \leq 1 \rightarrow r \sin \theta \geq 0 \rightarrow \sin \theta \geq 0$$

$$0 \leq y \leq 1 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$



$$\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}$$

$$0 \leq y \leq 1 \rightarrow r \sin \theta \leq 1 \rightarrow r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad (2)$$

$$\sqrt{4-y} \leq x \rightarrow \frac{y}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \tan \theta \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{if } x \leq \sqrt{4-y^2} \rightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \rightarrow r^2 \leq 4 \rightarrow r \leq 2$$

$$\text{①. ②. الشرائط } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{③. ④. الشرائط } r \leq \frac{1}{\sin \theta} \quad \theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow r \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$r \leq 2 \quad \text{الشرائط} \rightarrow r \leq 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^r r \ln r \, dr \quad \text{اشتغال فريجنر}$$

$$\begin{aligned} \int \ln r &= u \\ r dr &= du \end{aligned} \quad \int \frac{1}{r} dr = du$$

$$\int_0^r r \ln r \, dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \int_0^r \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{r} \right) dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \int_0^r$$

$$\text{ب) } \iint \sqrt{x+y} \, dxdy = \iint \sqrt{u^2+v^2} \, dudv \quad \begin{aligned} u &= r \cos \theta \\ v &= r \sin \theta \end{aligned} \quad \text{2 جلد}$$

$$\text{hit } \begin{aligned} \sqrt{x} &= u \rightarrow x = u^2 \\ \sqrt{y} &= v \rightarrow y = v^2 \end{aligned}$$

$$\times \iint \sqrt{u^2+v^2} \cdot \frac{1}{4} u^3 v^3 \, dudv = \iint r \frac{1}{4} (r \cos \theta)^3 (r \sin \theta)^3 r \, dr \, d\theta$$

$$\int \int \frac{1}{4} r^7 \cos^3 \theta \sin^3 \theta \, dr \, d\theta = \int \int \frac{1}{4} r^7 \frac{1}{r} \sin^3 \theta \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^r \sin^3 \theta \, d\theta$$

$$\sin^3 \theta = \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \rightarrow \frac{1}{6} \sin^3 \theta = \sin^3 \theta - \cos^2 \theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^6}{6} \sin^3 \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^6}{6} [\sin^3 \theta - \sin \theta \cos^2 \theta] \, d\theta = \frac{r^6}{6} \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

حجم (۶)

همانطور که در دایره انتگرال دوگانه فادیسافت پس ۲ عنصر در باشد. مثلا

$$\int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy$$

اما حجم مربوط به انتگرال سه گانه در باشد.

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz$$

در انتگرال سه گانه اگر بتوان شکل را رسم کرد. در غیر این صورت از اطلاعات مسئله کمک گرفته و فصل تلاقی (کران ها) را به دست می آوریم.

Ex: حجم محدود به رویه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z \\ x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$$

① $z = \frac{x^2 + y^2}{4} = \frac{r^2}{4} \rightarrow 0 \leq z < \frac{r^2}{4}$

② $x^2 + y^2 = 16y$

چون سمت چپ تساوی مثبت است پس سمت راست نیز مثبت است

$16y \geq 0 \rightarrow 16r \sin \theta \geq 0 \rightarrow \sin \theta \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$

③ $x^2 + y^2 = 16y \rightarrow r^2 = 16r \sin \theta$

$\rightarrow r(r - 16 \sin \theta) = 0$

$\rightarrow r = 0 \rightarrow r = 16 \sin \theta$

$V = \int_0^\pi d\theta \int_0^{16 \sin \theta} r dr \int_0^{\frac{r^2}{4}} dz$

$\int_0^\pi d\theta \int_0^{16 \sin \theta} \frac{r^2}{4} dr = \int_0^\pi \frac{16^3}{14} \sin^4 \theta d\theta$

$\frac{r^3}{14} \Big|_0^{16 \sin \theta} = \frac{1}{14} (16^3 \sin^4 \theta)$

Ex: حجم محدود به کره شعاع ۲ و استوانه $r^2 = a^2$ را به دست آوریم

hit $x^2 + y^2 + z^2 = (2a)^2 \rightarrow z = \pm \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$

$r^2 = a^2 \rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

$$\iiint dx dy dz =$$

① $z = x^r + fy^r$ $0 \leq z \leq x^r + fy^r$

$$y^r = x \xrightarrow{\text{با } x \text{ عوض کن}} (x^r)^r = x \rightarrow x^r = x \rightarrow x^r - x = 0$$

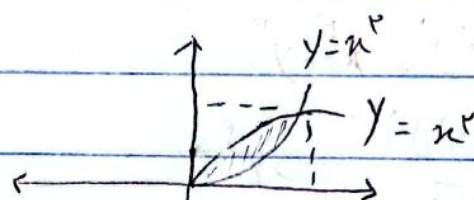
$$y = x^r \xrightarrow{\text{با } x \text{ عوض کن}} x(x^r - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 0$$

$$z = 0$$

$$(x^r - 1) = (x - 1)(x^r + x + 1)$$

$$\rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$



$$V = \int_0^1 dx \int_{x^r}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x^r + fy^r} dz$$

$$\int_0^1 dx \int_{x^r}^{\sqrt{x}} (x^r + fy^r) dy \xrightarrow{\text{با } x \text{ عوض کن}} \left[x^r y + \frac{f y^r}{r} \right]_{x^r}^{\sqrt{x}}$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^r (\sqrt{x}) + \frac{f (\sqrt{x})^r}{r} \right) - \left(x^r (x^r) + \frac{f (x^r)^r}{r} \right) dx$$

$$I = \int_0^\infty e^{-x^r} dx$$

$$I^r = I \times I = \left(\int_0^\infty e^{-x^r} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^r} dy \right)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y^r} dx dy$$

$$x, \rightarrow r \cos \theta, \rightarrow \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{r} \leq \theta \leq \frac{\pi}{r}$$

$$y, \rightarrow r \sin \theta, \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{اشتراک} \rightarrow \cdot \leq \theta \leq \frac{\pi}{r}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Subject

Date

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr$$

$$\int_0^{\pi} d\theta \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \rightarrow -\frac{1}{2} (e^{-\infty} - e^0)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{1} \right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow I = \frac{\pi}{2} \rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

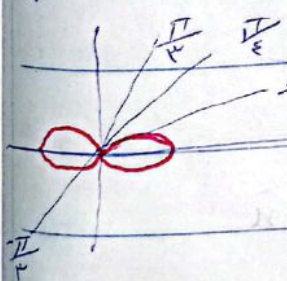
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

مساحت محدود به منحنی

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{(r^2)^2} \Rightarrow r^4$$

$$r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2 \rightarrow r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2$$

$$(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 1 \rightarrow r^2 = \cos 2\theta \rightarrow r = \sqrt{\cos 2\theta}$$



θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

θ	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
r	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

نقطه است از $\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ و از $\frac{5\pi}{4}$ تا $\frac{7\pi}{4}$ را محاسبه کرده و در ۴ ضرب کنیم

$$4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r dr$$

$$r = 1 + \cos \theta$$

مساحت محدود

2. حجم محدود از بالای $z = x^2 + y^2$ و از تار به استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و از پایین $z = 0$

(3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ جمع محدود

(4) $x + y + z = 1$ جمع محدود

(5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ جمع محدود

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
r	2	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	1	0



حل 1

$\theta \rightarrow -\theta$ تغییر
 $1 + \cos(-\theta) = 1 + \cos\theta$
 انتگرال را در $[0, \pi]$ با محاسبه کرد و در آخر بسیم

$$\int_0^\pi \int_0^{1+\cos\theta} r dr d\theta$$

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{r^2} dz$$

حل 2

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r dr \left(2 \int_0^{r^2} dz \right)$$

$$= \int_0^\pi d\theta \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad (1)$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) = 2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

حل 3

$$(1) \rightarrow z = r$$

$$(2) \rightarrow z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \rightarrow \sqrt{2 - r^2}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{1-r^2}} \frac{dz}{(\sqrt{1-r^2}-r)}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} - r^2 dr$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{r} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^1$$

$$x+y+z=1 \rightarrow z=1-x-y$$

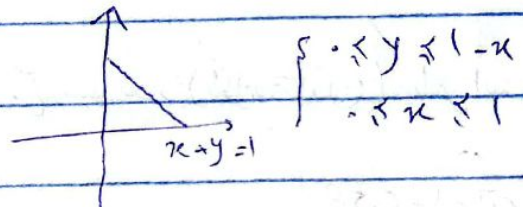
$$x+y+z=1 \rightarrow z=1-x-y$$

$$z=0$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$x+y=1 \rightarrow \text{if } y=0 \rightarrow x=1$$



$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y) = \int_0^1 dx \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x}$$

$$\int_0^1 dx \left(1-x - \left(x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) \right)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^2 - x \Big|_0^1$$

$$\frac{z}{c} = -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$z = -\frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} + c$$

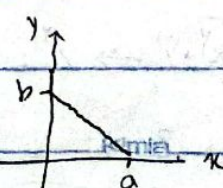
$$x=0 \quad y=0 \quad z=0$$

$$\text{if } y=0 \rightarrow -\frac{cx}{a} + c = 0$$

$$x=a$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b(1-\frac{x}{a}) \end{cases}$$



Subject

$$\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{-\frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} + c} dz =$$

$$\int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (-\frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} + c) dy = \int_0^a dx \left[-\frac{cx}{a}y - \frac{cy^2}{2b} + cy \right]_0^{b(1-\frac{x}{a})}$$

$$\int_0^a dx \left[-\frac{cx}{a} \left(b(1-\frac{x}{a}) \right) - \frac{c}{2b} \left(b(1-\frac{x}{a}) \right)^2 + c \left(b(1-\frac{x}{a}) \right) \right]_0^a$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$z = z_0$$



مختصات استوانه ای:

کف و سقف استوانه دایره به شعاع a و ارتفاع استوانه z_0 دارند.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z_0$$

برای محاسبه از فرمول استفاده کنیم (در تغییر مختصات - جکوبی)

	$\frac{\partial x}{\partial r}$	$\frac{\partial x}{\partial \theta}$	$\frac{\partial x}{\partial z}$		$\frac{\partial y}{\partial r}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta}$	$\frac{\partial y}{\partial z}$		$\frac{\partial z}{\partial r}$	$\frac{\partial z}{\partial \theta}$	$\frac{\partial z}{\partial z}$
f	$\cos \theta$	$-r \sin \theta$	0	+	$\sin \theta$	$r \cos \theta$	0	-	0	0	1
	$\cos \theta$	$-r \sin \theta$	0	+	$\sin \theta$	$r \cos \theta$	0	-	0	0	1
	$\cos \theta$	$-r \sin \theta$	0	+	$\sin \theta$	$r \cos \theta$	0	-	0	0	1

$$= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos \theta (r \cos \theta) + r \sin \theta (\sin \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

$$\textcircled{1} \text{ کره } (x^2 + y^2 + z^2 = a^2)$$

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi$$

$$z = \rho \cos \phi$$

$$= -J =$$

	$\frac{\partial x}{\partial \rho}$	$\frac{\partial x}{\partial \theta}$	$\frac{\partial x}{\partial \phi}$
y	$\frac{\partial y}{\partial \rho}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta}$	$\frac{\partial y}{\partial \phi}$
	$\frac{\partial z}{\partial \rho}$	$\frac{\partial z}{\partial \theta}$	$\frac{\partial z}{\partial \phi}$

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi \quad \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \quad \rho \cos \theta \sin \phi \quad \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi \quad 0 \quad -\sin \phi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ 3 \times 3 \end{array} \begin{array}{l} \text{matrix} \\ \text{A} \end{array} \vec{f} = \rho \sin \theta
 \end{array}$$

$$I = \int \sqrt{9-x} \, dx$$

با دایرهی انتگرال بیان

$$9-x = T \quad \text{عوض} \quad -dx = dT \rightarrow dx = -dT$$

$$I = \int \sqrt{T} (-dT) = -\int T^{\frac{1}{2}} dT = \frac{T^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} (9-x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{2} \int x \sqrt{1-3x^2} \, dx$$

$$1-3x^2 = T \rightarrow -6x \, dx = dT \rightarrow x \, dx = \frac{-dT}{6}$$

$$I = \int (\sqrt{T}) \frac{-dT}{6} = -\frac{1}{6} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{9} \left(\frac{2}{3} \right) (1-3x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{x^2-1} \rightarrow (x-1)(x+1)$$

چون صفری که به صورت حاصل ضرب ۲ عبارت (پایین) است پس آن را به صورت زیر داریم:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x^2-1} \quad \textcircled{1} \rightarrow A(x-1) + B(x+1) = 1$$

$$\text{if } x = -1 \rightarrow -2B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{if } x = 1 \rightarrow 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x+1)$$

$$\textcircled{1} \int \frac{x+1}{x^2+4x} \, dx \xrightarrow{\text{فاکتور}} x(x^2+4) \rightarrow \text{توان } 1-x \text{ برای عدد - اقساما باین}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{x+1}{x^2+4} \rightarrow A(x^2+4) + (Bx+C)x = x+1 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{if } x \rightarrow 0 \rightarrow 4A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx = x+1$$

$$A+B=0 \rightarrow B=-A=-r$$

$$C=1 \rightarrow \frac{-rx}{x^2+r} + \frac{1}{x^2+r}$$

$$\int \frac{r}{x} + \frac{-rx+1}{x^2+r} dx$$

$$= r \ln(x) - \ln(x^2+r) + \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$$

$$\text{نکته: } \frac{du}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{a} \right)$$

$$J = \int \frac{x^3 - 3x^2 - r}{x^3 - x^2 - rx}$$

چون توان صورت را به صورت حاصل از تقسیم استفاده کنیم

$$\frac{(-)}{+} = \text{خارج قسمت} + \text{باقی مانده}$$

$$\frac{1}{x^2+r} \rightarrow \text{مقسوم علیه}$$

$$\frac{r}{x^2+r} \rightarrow \text{خارج قسمت}$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 - r}{x^3 - x^2 - rx}$$

$$x(-) \frac{x^3 - x^2 - rx}{x^3 - x^2 - rx}$$

$$\frac{x^3 - x^2 - rx - r}{x^3 - x^2 - rx}$$

$$\frac{-x^2 - rx - r}{-x^2 - rx}$$

و

$$\int \frac{x+1}{x^2+r} + \frac{(-x-r)}{x^3 - x^2 - rx}$$

$$\int (x+1) dx + \int \frac{(-x-r)}{x(x^2+r)(x-r)(x+1)} dx$$

$$\frac{(x^3 - x^2 - rx - r)}{x(x^2+r)(x-r)(x+1)}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-r} + \frac{C}{x+1} = \frac{-x-r}{x(x-r)(x+1)}$$

مقسوم

$$\rightarrow A(x-r)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-r) = -x^2 - r$$

$$\text{if } \rightarrow (x=r) = 6B = -r \rightarrow B = -\frac{r}{r}$$

$$\text{if } \rightarrow (x=-1) = 3C = -1 \rightarrow C = -\frac{1}{r}$$

$$\text{if } \rightarrow (x=0) = -rA = -r \rightarrow A = 1$$

$$\frac{x^3}{r} + x + \ln(x) - \frac{r}{r} \ln(x-r) - \frac{1}{r} \ln(x+1)$$

$$\frac{x^3}{r} + x + \ln(x) - \frac{r}{r} \ln(x-r) - \frac{1}{r} \ln(x+1)$$

$$\textcircled{9} \int \frac{x^r+1}{x^r+1} dx =$$

$$\frac{1}{(x+r)(x^2-2x+r)} \rightarrow \frac{A}{(x+r)} + \frac{B}{(x^2-2x+r)} = \frac{x^r+1}{x^r+1}$$

$$A(x^2-2x+r) + (Bx+C)(x+r) = x^r+1$$

$$\text{if } x=r \rightarrow A(r-r+r) = r+1 \rightarrow A = \frac{0}{r}$$

$$= 2 \int_0^1 dv \int_0^v \frac{1}{r} \left(v - \frac{1}{v} \right) \cos \frac{u}{v} \frac{u}{v} du = \int_0^1 dv \left(v \sin \left(\frac{u}{v} \right) \right) \Big|_0^v$$

$$= \int_0^1 v \sin 1 dv$$

$$\frac{\sin \frac{u}{v}}{\frac{1}{v}} = \sin \frac{u}{v}$$

$$Ax^2 - 2Ax + 1A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 1C = x^2 + 1$$

$$A + B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{x} + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = \frac{1}{x} \ln |x+1| + \dots$$

$$\int_0^1 dx \int_c^{1-x} \cos \left(\frac{x-y}{x+y} \right) dy$$

$$\frac{1}{x} \cos \left(\frac{u}{v} \right)$$

$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$J = \frac{1}{|J|} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u+v \\ 2y=-u+v \end{cases}$$

$$2y = -u+v \rightarrow y = \frac{-u+v}{2}$$

$$\text{if } x \geq 0 \rightarrow \frac{u+v}{2} \geq 0 \rightarrow u \geq -v$$

$$\text{if } x \leq 1 \rightarrow \frac{u+v}{2} \leq 1 \rightarrow u+v \leq 2$$

$$y \geq 0 \rightarrow \frac{-u+v}{2} \geq 0$$

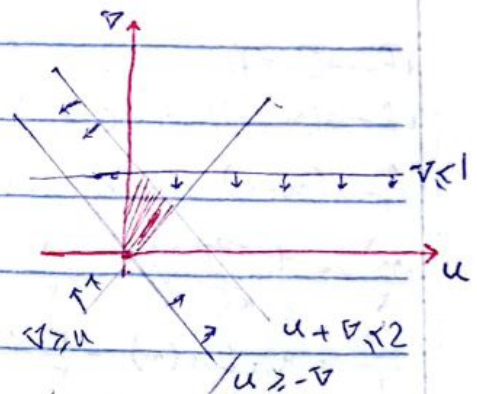
$$y \leq 1-x \rightarrow y+x \leq 1 \rightarrow v \leq 1$$

$$\int_0^1 du \int_u^{1-u} \frac{1}{v} \cos \left(\frac{u}{v} \right) dv$$

چون در فرم سینوس مکرر دارد پس فایده ندارد از این استفاده کن دشوار است پس جای du

$$\int_0^1 dv \int_0^v \frac{1}{v} \cos \left(\frac{u}{v} \right) du$$

تغییر متغیر



$$\int_0^1 \int_0^1 (2x - 3y^2) dx dy \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x^2 y e^{xy} dx dy \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Subject

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 (x^2 - y^2) dx dy$$

$$\left. x^2 - y^2 x \right|_{-1}^1 = (1 - y^2) - (-1 - y^2) = -2y^2$$

$$\int_0^1 -2y^2 dy = -\frac{2y^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 x^2 y e^{xy} dx$$

چون کران های x اشکال محدودیت است پس در همان جای دیفرانسیل را عوض کرد تا راحت تر

$$\int_0^1 dx \int_0^1 x^2 y e^{xy} dy$$

اشکال مشتق

$$\begin{aligned} &+ y \cdot x^2 e^{xy} \\ &- 1 \cdot x^2 e^{xy} \\ &0 \cdot x^2 e^{xy} \end{aligned}$$

$$x^2 y e^{xy} - x^2 y \Big|_0^1 = 1$$

$$= x^2 y e^{xy} - x^2 y \Big|_0^1 \rightarrow \int_0^1 (x^2 y e^{xy} - x^2 y) dx$$

$$= x^2 y e^{xy} - x^2 y \Big|_0^1$$

اشکال مشتق

$$\begin{aligned} &+ 2x \cdot e^{xy} \\ &- 2 \cdot \frac{1}{x} e^{xy} \\ &0 \cdot \frac{1}{x} e^{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} \right) - \frac{1}{x} e^{xy} + \frac{1}{x} e^{xy} \\ &= \left(e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} + \frac{1}{x} e^{xy} \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 x \cos(x^2 + y) dx dy$$

$$\sqrt{\pi} \leq x \leq \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} dy \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x^2 + y) \right) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} [\sin y - \sin(\pi + y)] \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} [-\cos y + \cos(\pi + y)] \Big|_0^{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{-\cos \pi}{+1} + \frac{\cos 2\pi}{1} \right) - \left(\frac{-\cos 0}{-1} + \frac{\cos \pi}{-1} \right) \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} [2 - (-2)] = 2$$

$$\begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix} f(x)$$

$$g(x) \leq b$$

$$x \geq 0$$

مسئله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید.

همواره ضرورتی ندارد که min درین سودآوری را max درین مقیدهای مساله می توان بهر دو بهینه ادساعت کاری کارگران در هفته در یک کارخانه محاصل یا کیفیت محصولات یک کارخانه باشد.

$$F = f(x) + \lambda (g(x) - b)$$

برای حل چنین مسائلی از توابع لاگرانژ استفاده می کنیم

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

چس را معادله های به دست می آوریم و معادلات به دست می آوریم.

Ex. ما درین xy^2 با شرط $3x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ را به دست می آوریم.

$$F = xy^2 + \lambda (3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + \lambda (4x) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-y^2}{4x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda (2y) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-xz}{2y} \quad (2) \quad (y \neq 0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda (2z) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-xy}{2z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0 \rightarrow \quad (4)$$

$$(1) = (2) \rightarrow \frac{-y^2}{4x} = \frac{-xz}{2y} \rightarrow y^2 = 3x^2 \quad (5)$$

$$(2) = (3) \rightarrow \frac{-xz}{2y} = \frac{-xy}{2z} \rightarrow y^2 = z^2 \quad (6) \rightarrow 3x^2 = z^2$$

$$(4) \rightarrow 3x^2 + 3x^2 + 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow 9x^2 = 4 \rightarrow x = \pm \frac{2}{3}$$

$$y^2 = 3x^2 = 3\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{3} \rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$$

Subject

برای به دست آوردن نقاطی که فاصله را به کمترین می‌رساند، باید از روش لاگرانژ استفاده کرد.

$$F = xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda \frac{2x}{a^2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-yz a^2}{2x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda \frac{2y}{b^2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-xz b^2}{2y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda \frac{2z}{c^2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-xy c^2}{2z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$(1) = (2) \quad \frac{-yz a^2}{2x} = \frac{-xz b^2}{2y} \rightarrow y^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{bx}{a} \quad (4)$$

$$(2) = (3) \quad \frac{-xz b^2}{2y} = \frac{-xy c^2}{2z} \rightarrow y^2 = \frac{z^2 b^2}{c^2} \Rightarrow y = \pm \frac{zb}{c} \quad (5)$$

$$(4) = (5) \quad \frac{bx}{a} = \frac{zb}{c} \rightarrow z = \frac{cx}{a} \quad (6)$$

$$(6) \quad \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{bx}{a} \right)^2 + \left(\frac{cx}{a} \right)^2 = 1$$

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) = 1 \rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2 + 1}} \quad y = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2 + 1}} \quad z = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2 + 1}}$$

$$xyz = \frac{abc}{\sqrt{b^2 + c^2 + 1}}$$

نقاطی که فاصله را به کمترین می‌رساند، باید از روش لاگرانژ استفاده کرد. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ را به کمترین می‌رسانیم. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2 (x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda_1 2x + \lambda_2 2x = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda_1 2y + \lambda_2 2y = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda_1 2z + \lambda_2 2z = 0 \rightarrow z = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$(4) \quad 2x + \lambda_1 2x + \lambda_2 2x = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{\lambda_2}{x} \quad (5) \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$2y + 3\lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}y\lambda_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x\lambda_2 = -\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}y\lambda_2 \rightarrow \lambda_2(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y) = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}x}{(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y)}$$

$$x = \pm \frac{2}{3}$$

$$y = \pm \frac{1}{3}$$

$$Z = 4 - 4x - 3y \rightarrow 4 - 4\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow 4 - \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3} \quad \left[\begin{array}{l} 4-8=1 \\ 4-8=1 \end{array} \right]$$

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3} \rightarrow x^2 + y^2 + 2^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2 \quad \text{min}$$

$$x^2 + y^2 + 2^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2 \quad \text{max}$$

فرض کنید x و y زوایای حاده‌ای در یک مثلث قائم الزامی باشد معلوم است ما داریم



$$x + y = 90^\circ$$

$$F = \sin x \cdot \sin y + \lambda(x + y - 90)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y + \lambda(1) = 0 \rightarrow \lambda = -\cos x \sin y \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \cos y \cdot \sin x + \lambda(1) = 0 \rightarrow \lambda = -\cos y \sin x \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 90 = 0$$

$$(1) = (2) \rightarrow -\cos x \sin y = -\cos y \sin x$$

$$\tan y = \tan x \rightarrow y = x = \frac{\pi}{4}$$

فرض کنیم $Z = 4 - \frac{x^2}{3} - y^2$ فروض است نقطه P در این رویه چنان تعیین

شود که مجموع مساحت‌های مستطین و مضرب آن بیشینه شود؟

$$Z = 4 - \frac{x^2}{3} - y^2 = 0$$

Subject.....

بردار زنیفالی
مقدار کمبود بر صفا

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{2x}{r}, 2y, 1 \right)$$

$$x = (a, b, c) = \nabla f$$

$$a(x-x) + b(y-y) + c(z-z) = 0 \rightarrow \frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + 1(z-z) = 0$$

بردار صفا
مقدار صفا

$$\begin{cases} x=y=0 \\ x=z=0 \\ y=z=0 \end{cases}$$

if $x=y=0$ ① $\rightarrow \frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + (z-z) = 0$

$$\rightarrow -\frac{x^2}{r} - 2y^2 + 2 - 2 = 0 \rightarrow 2 = \frac{x^2}{r} + 2y^2 + 2 = 12$$

$-2 + 1$

if $x=z=0$ ② $\rightarrow$

$$\frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + (z-z) = -\frac{x^2}{r} + 2yy - 2y^2 - 2 = 0$$

$$\rightarrow +2 - 1 - 2 = -2yy \rightarrow y = \frac{2-1}{-2y}$$

if $x \neq z=0$

$$\frac{x}{r}(x-x) + 2y(y-y) + (z-z) \rightarrow \frac{x}{r}x - \frac{x^2}{r} - 2y^2 - 2 = 0$$

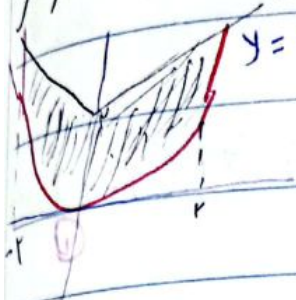
$$x = \frac{1-2}{\frac{x}{r}}$$

مقدار صفا

$$\frac{1}{r} \times y \times 2 = \frac{1}{r} \times (1-2) \left(\frac{2-1}{ry} \right) \left(\frac{1-2}{\frac{x}{r}} \right)$$

$$r = \frac{1}{y} \cdot 1 - 2$$

$$\iint rxy \, dx \, dy \rightarrow$$



$$y = r + |x|$$

$$\text{if } x > 0 \rightarrow r + x = x^2 \rightarrow x^2 - x - r = 0$$

$$(x-r)(x+1) \rightarrow x = r \quad \checkmark$$

$$x = -1 \quad x$$

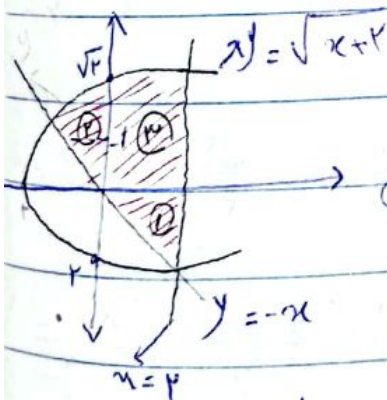
$$\text{if } x < 0 \rightarrow r - x = x^2 \rightarrow x^2 + x - r = 0$$

$$(x+r)(x-1) \rightarrow x = -r$$

$$\text{Answer} = \int_{-r}^0 dx \int_{x^2}^{r-x} rxy \, dy + \int_0^r dx \int_{x^2}^{r+x} rxy \, dy \rightarrow$$

$$\int_{-r}^0 rx \left(\frac{y^2}{2} \right) dx \Big|_{x^2}^{r-x} + \int_0^r rx \left(\frac{y^2}{2} \right) dx \Big|_{x^2}^{r+x}$$

$$\iint rxy \, dx \, dy \quad \begin{cases} y^2 = x+r \\ y = -x \\ x = r \end{cases}$$



$$\text{Answer} = \int_{-r}^0 dy \int_{-y}^r rxy \, dx$$

$$(1) \int_{-r}^0 dy \int_{-y}^0 rxy \, dx + \int_{-r}^0 dy \int_0^r rxy \, dx$$

$$(2) \int_0^r dx \int_{-x}^{\sqrt{x+r}} rxy \, dy$$

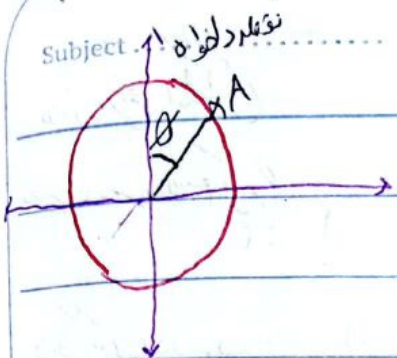
$$y = \sqrt{x+r} \quad \begin{cases} x = -r \rightarrow y^2 = x+r \\ y+r \rightarrow x^2 = x+r \end{cases}$$

$$x^2 - x - r = 0$$

$$(x+1)(x-r)$$

$$x = -1$$

$$x = r$$



حجم مختصات کروی

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

ρ مربوط به شعاع رادیوس است

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, \quad \rho \geq 0$$

note: اگر نقطه‌ای روی پوسته کره باشد از A به مختصات واصل می‌شود (مثلاً A)

مثلاً زاویه بین خط OA با محور z در زاویه ϕ را می‌سازد.

ϕ به (زاویه ϕ که متناهی است)

note: (زاویه بین در مختصات کروی)

دترمینان جابجایی 3×3

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$$

note: در مختصات کروی داریم:

$$\rho^2 \sin \phi$$

$$\iiint dx dy dz = \iiint \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

note: در مختصات قطبی داریم:

$$\iiint dx dy dz = \int dz \int \int r dr d\theta$$

$$\begin{cases} r = \rho \sin \phi \\ 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^a \rho^2 d\rho = 2\pi \left(\frac{2a^3}{3} \right) = \frac{4\pi a^3}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin \phi d\phi = \left[-\cos \phi \right]_0^\pi = -(-1 - 1) = 2$$

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = E_k$$

$$\begin{cases} \rho = a \\ \rho = b \\ a > b \end{cases}$$

Subject

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (p^r)^{\frac{3}{2}} = p^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_b^a \frac{p^r}{p^{\frac{3}{2}}} dp \rightarrow \int_b^a \frac{1}{p} dp = \ln p \Big|_b^a = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$= 2\pi (2) \ln \left(\frac{a}{b}\right) = 4\pi \ln \frac{a}{b}$$

نو ۱: (انتگرال خطی) $F = (m, n, p)$ منحنی از A به B

$$\int F \cdot dR = \int (m, n, p) \cdot (dz, dy, dx)$$

$$= \int m dx + n dy + p dz$$

نو ۲: در صورتیکه کار انجام شده وابسته به مسیر (مسیر خاص است) و مسیر فرضی شکل دارد.

نیاز به نیرو یا پتانسیل است.

در خارج

$$\text{curl } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

نو ۳: $\text{curl } F = 0$ (گرادینت)

نو ۴: اگر $\text{curl } F = 0$ باشد نیرو یا پتانسیل است (کار انجام شده به مسیر بستگی ندارد)

$$\text{curl } F = i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ n & p \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ m & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ m & n \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial n}{\partial z} \quad \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial z} \quad \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial z}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial y}$$

نو ۵: اگر $\text{curl } F = 0$ باشد در این صورت

$F = (x^2+y^2)z + (y^2-x^2)z + (z^2+y^2)k$

فرض کنید نیرو یا پتانسیل

از آن تابع است

محسبات تا (ادامه) A با نیروی از دو مسیر زیر است.

الف) در طول خط A و ب) در $x=t, y=t^2, z=t^3$

$\cdot t \leq 1$
 $A(1, 1, 1)$
 $x = t \rightarrow dx = dt$
 $y = t \rightarrow dy = dt$
 $z = t \rightarrow dz = dt$

$$\int M dx + N dy + P dz$$

$$M = x^2 + y = t^2 + t$$

$$N = y^2 - x = t^2 - t$$

$$P = z^2 + y = t^2 + t$$

$$\int_0^1 (t^2 + t) dt + (t^2 - t) dt + (t^2 + t) dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$M = x^2 + y = t^3 + t^2 - 2t^2$$

$$N = y^2 - x = t^3 - t$$

$$P = z^2 + y = t^3 + t^2$$

$$\int M dx + N dy + P dz = \int_0^1 2t^3 dt + (t^3 - t) 2t dt + (t^3 + t^2) (2t^2 dt)$$

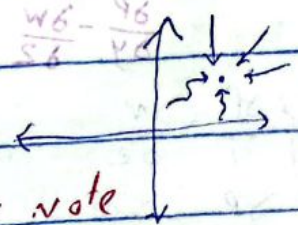
عدد ϵ را تغییر می دهیم تا جواب چند تغییر دهد

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = L \quad \text{برای تابع یک متغیره بصورت زیر داشته باشیم}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \rightarrow |P(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{(m, y) \rightarrow (a, b)} P(m, y) = L \quad \text{در فضای دو متغیره}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta, |y - b| < \delta \rightarrow |P(x, y) - L| < \epsilon$$



note: برای بحث پیوسته نیز اندر مسیرهای متفاوت حرکت کنیم جواب یک باشد (در حالت یک متغیره محیط و راست و $P(a)$ را بررسی می کرد)

note: (همانطور که) $(a - \delta, a + \delta)$ یک همای برای a در R' محسوب می شود

Subject

Date



دایره

در فضای $\mathbb{R}^2$ به یک نقطه a یک دایره به شعاع δ می‌کشیم

$$f_m: \text{نشان دهید برای تابع } f(x, y) = x, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ such that } |x - 0| < \delta \rightarrow |f(x, y) - 0| < \epsilon$$

$$|f(x, y) - 0| = |x - 0| < \epsilon$$

کافز است $\epsilon = \delta$ شود (اختیار کرد تا مسئله حل شود)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) - 0| < \epsilon$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

چون δ مثبت است

پس $\epsilon = \delta$ (کافز است اختیار شود)

$$f_m: \text{نشان دهید برای تابع } f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \quad (x \neq -y) \text{ در ربع اول و دوم}$$

$$y = mx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - mx}{x + mx} = \frac{1 - m}{1 + m}$$

$$\text{if } m = 2 \rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$\text{if } m = 3 \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

برای m های متفاوت جواب های متنوع داریم پس دارای حد نیست

نکته: (قضایا جدید)

قضایا جدید در مورد تابع f به دست می‌دهیم و برای اثبات نیز داریم

$$i) \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (f + g) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f + \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g$$

$$ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} (f \cdot g) = (\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f) \cdot (\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g)$$

$$iii) \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f}{\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g} \quad \text{if } \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g \neq 0$$

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow x^2 + y^2 < \delta^2$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \text{برابر می شود} \quad (x^2 + y^2)^2 \geq 4x^2 y^2$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } (x^2 + y^2)} (x^2 + y^2) \geq \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)} \rightarrow \frac{(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)} = \rho$$

$$\delta = \sqrt{4\varepsilon} \rightarrow \frac{(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)} \rightarrow \varepsilon = \frac{\delta^2}{4} \rightarrow \frac{(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad E_m$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

$$\delta = \sqrt{4\varepsilon} \rightarrow \frac{(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)} \rightarrow \varepsilon = \frac{\delta^2}{4} \rightarrow \frac{(x^2 + y^2)}{4} \geq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)}$$

$$y = mx \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad E_m$$

$$(x, y) = (0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$$\xrightarrow{\text{if } m=1} \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{if } m=2} \frac{2}{5}$$

دارای حد نیست زیرا برای m های متفاوت، جواب متفاوت دارد

قضیه گرین: هرگاه منحنی C منحنی بسته ای در صفحه xy باشد به طوری که هر دو مؤلفه محورهای مختصات x و y را قطع نکند و m و n و $\frac{\partial m}{\partial x}$ و $\frac{\partial n}{\partial y}$ بر روی منحنی C و در داخل آن تابع پیوسته باشد و R ناحیه دایره منحنی C باشد آنگاه

$$\int_C m dx + n dy = \iint_R \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y} \right) dR \rightarrow dR = dx dy$$

قضیه گرین: برای $F = -2y^2 i + 3x^2 j$ و دایره $r = a$ تحقیق کنید.

$$\frac{\partial n}{\partial x} = 6x \quad \frac{\partial m}{\partial y} = -4y \quad \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y} = 6x - (-4y) = 6x + 4y = \omega$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \omega r dr$$

$$= \pi \omega a^2$$

$$m = -2y^2 = -2a^2 \sin^2 \theta$$

$$n = 3x^2 = 3a^2 \cos^2 \theta$$

$$dx = -a \sin \theta d\theta$$

$$dy = a \cos \theta d\theta$$

$$\int M dx + N dy \rightarrow \int_0^{2\pi} (-r^2 \sin \theta)(-a \sin \theta d\theta) + (r^2 a \cos \theta)(a \cos \theta d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 a^2 \sin^2 \theta + r^2 a^2 \cos^2 \theta d\theta = r^2 a^2 (2\pi) + \int_0^{2\pi} a^2 r^2 d\theta$$

$$\rightarrow r^2 a^2 + a^2 r^2 \cos^2 \theta \rightarrow 1 + \cos^2 \theta$$

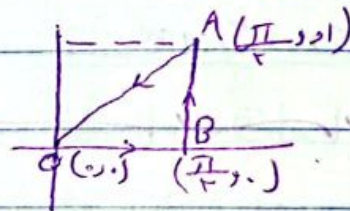
$$= r^2 a^2 \pi + \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{r} + \frac{a^2}{r} \cos^2 \theta d\theta = r^2 a^2 \pi + a^2 \pi = a^2 r^2 \pi$$

$$\frac{d^2 \pi}{d\theta} \sin^2 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

En برای میان: $F = (xy + \sin x)i + \cos x j$ و جهت زیر قوس مربع را تغییر

$$M = xy + \sin x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x$$

$$N = \cos x \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\sin x$$



$$\int_{OB} + \int_{AB} + \int_{AO}$$

OB: $y=0 \rightarrow dy=0$
 $0 < x < \frac{\pi}{2}$

BA: $x = \frac{\pi}{2} \rightarrow dx=0$
 $0 < y < 1$

AO: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{\frac{\pi}{2} - 0} = -\frac{2}{\pi}$
 $y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 1 = -\frac{2}{\pi}(x - \frac{\pi}{2})$
 $y = \frac{2}{\pi}x \rightarrow dy = \frac{2}{\pi}dx$

$$\int M dx + N dy$$

چون y و x در حال تغییرند dy, dx

OB: $M = \sin x$

$$\rightarrow M dx + N dy$$

AO: $M = xy + \sin x = \frac{2}{\pi}x + \sin x$

BA: $N = \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow M dx + N dy$

AO: $M = xy + \sin x = \frac{2}{\pi}x + \sin x$
 $N = \cos x$

$$M dx + N dy = \left(\frac{2}{\pi}x + \sin x\right) dx + \cos\left(\frac{2}{\pi}x\right) dx$$

OB: $\int_0^{\pi/2} M dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -[\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0] = 1$

BA: $\rightarrow 0$ (۲)

AO: $\int_{\pi/2}^0 \left(\frac{2}{\pi}x + \sin x + \frac{2}{\pi} \cos x\right) dx$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{2}\right) - \cos x + \frac{2}{\pi} \sin x \Big|_{\pi/2}^0$$

(۳)

در اکثر ① + ② + ③ جواب مسائل است.

$$\iint \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial y} \right) dx dy = \int \frac{1}{x} dx \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \pi (-\sin \pi - 2) dy$$

$$= \left(-\sin \pi - 2 \right) y \Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \pi$$

$$= \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} (-\sin \pi - 2) \frac{1}{\pi} \pi dx$$

$$\int \pi \sin \pi dx = -\cos \pi$$

$$= -\pi \cos \pi + \sin \pi$$

تعیین ماکزیمم (دیفرانسیل)

همراه با سطح باشد که جسم مانند γ در بر گرفته باشد و به کارخانه تمام به سطح دو طرفه باشد
جهت مثبت و محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ باشد آنها
اگر مؤلفه‌های F و مشتقات تغییر مرتبای $F = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ آنها در این خاصه پیوسته
مربوط باشد

$$\iiint \nabla \cdot F = dv = \iiint F \cdot n d\sigma$$

$$= \iiint \left(\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$= \iiint (m \cos \alpha + n \cos \beta + p \cos \gamma) d\sigma$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad F = (m, n, p)$$

$$\text{div } F = \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}$$

F_m : تعیین ماکزیمم و برای

$$F_m = m$$

$$F_n = n$$

$$F_p = p$$

$$\text{div } F = 1 + 1 + 1 = 3$$

$F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $\rho = a$ تعیین سیمه

$$\iiint \text{div } F dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^a \rho^2 \sin \phi d\rho = 4\pi a^3$$

Subject

$$n: \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = a\vec{r}$$

$$\iint F \cdot n \, d\sigma$$

اشکال

$$F = (x, y, z)$$

$$n = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}}$$

$$\sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} = a$$

$$F = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)$$

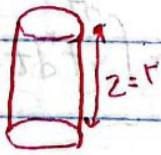
$$F \cdot n = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

$$\iint a^2 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi a \cdot \sin\theta \, d\theta = 4\pi a^3$$

تعبیر کرده اند

$$\text{انرژی} \quad \iint (x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy)$$

برای محاسبه در سطح استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $z=0$ و $z=2$ است (قاعده فوقانی)



$$F = (x, y, z) \rightarrow (x, y, z)$$

استوانه را بر داشته ایم.

$$\text{div } F = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint \text{div } F \, dV = 3 \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \, dr = 3(2)(2)2\pi = 24\pi$$

$$2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \, dr = 2(2\pi)(2) = 8\pi$$

در سقف استوانه یک دایره داریم (انتقال ۲ تا ۲) $z=2$ ثابت است.

$$24\pi - 8\pi = 16\pi$$

$$F = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$$

$$\text{div } F = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint 3 \, dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \, dr \int_0^2 dz$$

note: قسمت از بدنه استوانه 2 added

En: قسمت از بدنه استوانه

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = r - r \cos \theta$$

$$\iint_D d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(1-\cos\theta)} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (r - r \cos \theta) d\theta = r\theta - r \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{r(1-\cos\theta)} (r - r \cos \theta) dz d\theta = 2\pi r^2$$

$$C = \frac{c \cos t}{x} i + \frac{c \sin t}{y} j + \frac{t}{z} k$$

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt$$

$$ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt = \sqrt{3} dt$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + t^2) \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \left[\sin t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \sqrt{3} \left(\sin 2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3} \right) = \frac{8\sqrt{3}\pi^3}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx dy = ?$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r dr d\theta$$



$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$\text{if } y > 0 \rightarrow r \sin \theta > 0$$

$$y = r \sin \theta, 0 < y < 1$$

$$\sin \theta > 0 \Rightarrow \theta \in (0, \pi)$$

$$\text{if } y < 1 \rightarrow r \sin \theta < 1 \Rightarrow r < \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\text{if } r < x \rightarrow r \sin \theta < r \cos \theta$$

$$\rightarrow r \sin \theta < \cos \theta \Rightarrow r < \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow r < \cot \theta$$

$$x - 2y = \pm 1$$

$$x + 2y = \pm 2$$

: Ex

$$\iint (x^2 - 4y^2) dx dy$$

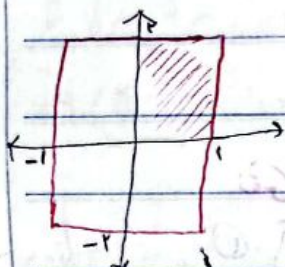
$$x - 2y = u$$

$$x + 2y = v$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

$$j = \frac{1}{J} = \frac{1}{4}$$

$$u = \pm 1, v = \pm 2$$



$$-1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} u v^2 dv du = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} \left(u - \frac{v^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 du$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4} \left(u - \frac{8}{3} \right) du = \frac{u^2}{8} \Big|_{-1}^1 - \frac{8}{3} u \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{8} - \frac{16}{3} = -\frac{125}{24}$$

Ex: محاسبه انتگرال سطح از تقاطع استوانه $x^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 2$



$$x^2 + z^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ z = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} dx = -\sin t dt \\ dz = \cos t dt \end{cases}$$

$$x + y + z = 2 \rightarrow y = 2 - x - z = 2 - \cos t - \sin t$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\sin t - \cos t)^2 + (\cos t)^2} dt$$

$$= \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \cos^2 t} dt = \sqrt{2(1 - \sin t \cos t)} dt$$

$$\int_C (x + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin^2 t) \sqrt{2(1 - \sin t \cos t)} dt$$

Ex: نشان دهید که نیرو پتانسیل است (curl(F) = 0) در این صورت F را پتانسیل می‌نامند.

$$F = \nabla \phi$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k$$

$$F = (y+2)i + (x+2)j + (x+y)k$$

روی مغزی $r(t) = (1-2)i + 2k$ و $q + 2 + 1$ به مسیر بستنی نامیده باشند یعنی
 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ در این صورت $\mathbf{F}$ را طوری به دست آورید که $\mathbf{F} = \nabla F$

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+2 & x+2 & x+y \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1-1) - \mathbf{j}(1-1) + \mathbf{k}(1-1) = \mathbf{0}$$

نقش در ثابت را دارد $\mathbf{F} = \nabla F = (y+2)\mathbf{i} + (x+2)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y+2 \quad F = xy + x^2 + h(y, z) \quad \text{نقش در ثابت}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{\partial h}{\partial y} = x+2 \quad \text{نقش در ثابت}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2 \quad \text{انتگرال نسبت به } y \quad h = 2y + g(z)$$

$$F = xy + x^2 + 2y + g(z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x+1 = g'(z) = p = x+y \quad g'(z) = y-1$$

$$g(z) = zy - z + C$$

$$F = xy + x^2 + 2y + zy - z + C \quad \square$$

پس داریم:

فرض کنید یک روی جهت دار سطح دار باشد C است همچنین فرض کنید میدان برداری
 مشتق پذیر و غیر مغزی C پیوسته است در این صورت $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$
 جهت برداری است که از روی C عمود بر هر نقطه در C است
 جهت برداری است که از روی C عمود بر هر نقطه در C است

فرض کنید یک سطح از $9 = x^2 + y^2 + z^2$ در بالای صفحه xy (یعنی $z=0$) قرار دارد
 بردار جهت دار $\mathbf{n}$ روی جهت عمود است $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ حل درستی
 قضیه استوکس را تحقیق کنید

$$F(x, y, z) \rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2dx + xdy + ydz = xdy$$

Subject

Date / /

$$dv = (dx, dy, dz) \quad (z=0 \rightarrow dz=0)$$

$$F \cdot dv = x dy = (r \cos \theta)(r \cos \theta d\theta) \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \rightarrow dy = r \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$F \cdot dv = 9 \cos^2 \theta d\theta \rightarrow \int F \cdot dv = \int_0^{2\pi} 9 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 9 \left(\frac{1}{2} 2\pi \right) = 9\pi$$

$\downarrow$ $1 + \cos 2\theta$

استفاده از فرمول $\iiint \text{curl } F \cdot n dr$

i	j	k
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
2	x	y

$$i(1-0) - j(0-1) + k(1-0) = (i+j+k) = (1, 1, 1)$$

معادله n از روی $g: x^2 + y^2 + z^2 = 9$

$$n = \frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j + \frac{\partial g}{\partial z} k = 2xi + 2yj + 2zk$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} = \frac{2xi + 2yj + 2zk}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}$$

$$n = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right)$$

$$d\sigma = \square dx dy = \square r dr d\theta$$

$$g: x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$d\sigma = \frac{\partial g}{\partial x} i + \frac{\partial g}{\partial y} j + \frac{\partial g}{\partial z} k$$

$$= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) dx dy = \frac{xi + yj + zk}{r_2} dx dy$$

$$= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2} \right) dx dy$$

$$\iiint \text{curl } F \cdot n d\sigma = \iiint \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r} \right) \frac{r}{\sqrt{9-r^2}} r dr d\theta$$

$$= \iiint \frac{x+y+\sqrt{9-r^2}}{\sqrt{9-r^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{9-r^2}} r dr d\theta$$

$\frac{r}{2} \rightarrow \sqrt{9-r^2}$

ماتریسها:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

بردارها نوعی از ماتریس ها هستند

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

ماتریسها اینست که تعداد سطرها و ستون برابر باشند. برعکس در غیر این صورت مستقلند

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

ماتریسها که در آن ها غیر قطر اصلی صفر باشد روی قطر اصلی

عدد نا صفری در تمام صفر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$I_{n \times n} = I_{3 \times 3} \quad \text{و} \quad I_{2 \times 2}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

روی قطر اصلی یک و بقیه ها در آن ها صفر باشد.

$$A_{m \times n} + B_{m \times n}$$

جمع ۲ ماتریس:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

عکس نه که ماتریس $(-A)$

$$A-B = A + (-B)$$

تفاضل

$$A-B = I$$

تکثیر عدد و ستون برابر باشد.

$$-B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرض ماتریس:

در ضرب ماتریس باید تعداد ستون A (عناصر اول از چپ) $m \times n$ و $n \times p$ برابر باشد. $A \times B = (AB)_{m \times p}$

معمولاً یعنی B برابر باشد $B \times A \rightarrow BA = B_{p \times m} \times A_{m \times n}$ صحیح است

مثلاً $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A \times B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 2 & 6 \\ 28 & 4 & 10 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-2 \times 7) + (3 \times 6) & (-2 \times -1) + (3 \times 0) & (-2 \times 0) + (3 \times 2) \\ (4 \times 7) + (5 \times 6) & (4 \times -1) + (5 \times 0) & (4 \times 0) + (5 \times 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 2 & 6 \\ 28 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

note: آنها ماتریس های A و B مربعی $n \times n$ و $A \times B$ و $B \times A$ صحیح است

دترمینان ماتریس A ($\det A$):

اگر A مربع باشد در این صورت دارای $\det A$ است $\det A = ad - bc$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ اگر مربع باشد $\rightarrow$ قطر اصلی - قطر فرعی

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = E_n$$

$$\det A = (3 \times 0) - (4 \times -1) = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad \det A = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-2 - 20) - 2(-5 - 4) + 2(-5 - 2) = 22 + 14 - 14 = 22$$

ماتریس معکوس (A^{-1})

اگر A مربع باشد $\det A \neq 0$ A^{-1} وجود دارد

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det A \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

note: (برای A^{-1} در 3×3 و بالاتر به سطر $\det A = 0$ باشد) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t$ $\rightarrow$ ترانپوز

ترانپوز: یعنی جای سطر و ستون در ماتریس عوض می شود.

دترمینان ماتریس A $\rightarrow$ سطر اول و ستون اول آن حذف شده است

Subject

Date / /

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A^{-1} = ?$$

Em - 2

Note: در تعیین ماتریس بالا ضرایب ضلالتی و قطری برای حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی

$$\det A = 3(4)(5) = 60 \neq 0 \quad 60 \neq 0$$

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^2 (20 - 0) = 20$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 (0) = 0$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad a_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-2)$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad a_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 20 & 0 & -2 \\ 5 & 15 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \square$$

stov: (1) A = 3(4)(5) = 60 \neq 0