$E(X+Y) = E(X)+E(Y) = ۲+۲٫۸۳ = ۴٫۸۴$

$E(x \cdot y) = E(x) \cdot E(y) = ۲ \times ۲٫۸۴ = ۵٫۶$

در ضرب چنین رابطه‌ای وجود ندارد
مگر اینکه ۲ متغیر x و y مستقل باشند.

$$Cov(x,y) = E(xy) - \underbrace{\mu_x \mu_y}_{E(x) \cdot E(y)} = ۵٫۵ - ۲(۲٫۸۳) = -۰٫۱$$

. ضریب همبستگی $Cor(x,y)$:

از آنجائیکه واحد اندازه‌گیری کوواریانس حاصلضرب واحدهای اندازه‌گیری x و y است و برای ۲ فرد و یا ۲ محقق در یک جامعه و با واحدهای متفاوت، مقادیر متفاوتی حاصل می‌شود، معمولاً از معیاری بنام «ضریب همبستگی» استفاده می‌کنند که واحد اندازه‌گیری ندارد. ضمن اینکه شدت ارتباط میان ۲ متغیر را نیز نشان می‌دهد.

$$Cor(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x) \cdot Var(y)}}$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad , \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

۱) $\rho_{xy} = -1 \Rightarrow$ معکوس. همبستگی کامل و منفی، میان x و y یک رابطه خطی با شیب منفی وجود دارد.

۲) $-1 < \rho_{xy} < 0$ همبستگی ناقص و منفی، اگر ρ به ۱− نزدیک‌تر شود رابطهٔ خطی محکم‌تری می‌شود.

۳) $\rho_{xy} = 0$ x و y ناهمبسته‌اند. مانند اینکه استاد به همه ۱۵ دهد آنگاه نمره با تلاش رابطه‌ای ندارد.

۴) $0 < \rho_{xy} < 1$ همبستگی ناقص و مثبت

ه) $\rho_{XY} = 1$ مستقیم $\underset{\text{مثبت } a}{Y = aX + b}$ همبستگی کامل دارای رابطه خطی با شیب مثبت

تمرین) ثابت کنید $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ برآوردگر با تورش از واریانس جامعه است.

$$E(S_x^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum (X-\bar{X})^2\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum\left[X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2\right]\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\left[\sum X^2 - n\bar{X}^2\right]\right] = \frac{1}{n}\left[\sum E[X^2] - nE[\bar{X}^2]\right]$$

با توجه به اینکه:

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow E[X^2] = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E[\bar{X}^2] - [E(\bar{X})]^2 \Rightarrow E[\bar{X}^2] = \mu_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{x}}^2 = \mu_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

اکنون اگر بجای $E(X^2)$ و $E(\bar{X}^2)$ مقادیر معادل آنرا در عبارت فوق جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$E(S_x^2) = \frac{1}{n}\left[\sum(\mu_x^2 + \sigma_x^2) - n\left(\mu_x^2 + \frac{\sigma_x^2}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n\mu_x^2 + n\sigma_x^2 - n\mu_x^2 - \sigma_x^2\right] = \frac{1}{n}(n-1)\sigma_x^2 = \frac{n-1}{n}\sigma_x^2 \neq \sigma_x^2$$

برای S_x^2 برآوردگر بدون تورش از واریانس جامعه خواهد بود که مجموع مجذور انحرافات از $\bar{x}$ بجای n به $n-1$ تقسیم شود

$$S_x^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

با تورش - دارای اریب $\quad S_b^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow E(S_b^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

biased

بدون تورش - نااریب $\quad S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow E(S_x^2) = \sigma^2$

unbiased

علی رغم اینکه S_b^2 تورش به اندازه $-\frac{\sigma^2}{n}$ دارد اما می توان ثابت کرد که:

$$MSE(S_b^2) \leq MSE(S_x^2)$$

با وجود اینکه S_b^2 با تورش است اما اندازه واریانس آن آنقدر کم است که MSE آن در مقایسه با

S_x^2 کوچکتر است و برآوردگر کاراتری است.

نمونه $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ و $Va(X) = \sigma^2$ واریانس جامعه

$E(\bar{X}) = \mu$

$Var(\bar{X}) = E(\overline{X^2}) - E^2(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow E(\overline{X^2}) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

$$Va(S_b^2) = E(\overline{X^2}) - E^2(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum x_i^2\right) - E(\bar{X})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum E(x_i^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu\right) = \frac{1}{n}\sum(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum \sigma^2 + \cancel{\mu^2} - \frac{\sigma^2}{n} - \cancel{\mu^2} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

از آنجائیکه $S_x^2 = \frac{n}{n-1} S_b^2$ می‌باشد در اینصورت $Va(S_x^2)$ برابر است با:

$$Va(S_x^2) = \frac{n}{\cancel{n-1}}\left(\frac{\cancel{n-1}}{n}\sigma^2\right) = \sigma^2$$

$$Va(S_x^2) = \sigma^2 > Va(S_b^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

- برآوردگر (برآورد فاصله):

مطالبی را که تاحال ارائه کردیم درخصوص چگونگی یافتن برآوردگرهای نقطه‌ای و برخی از ویژگیهای آنها بود. از آنجائیکه با تغییر نمونه مقدار برآوردگر (برآورد) ممکن است تغییر کند برخی از آمارذانان مایلند بجای تعیین یک مقدار تقریبی برای پارامتر مجهول، فاصله‌ای را پیدا کنند که با اطمینان بالائی پارامتر مجهول را دربرداشته باشد، چنین فواصلی را «فاصله اطمینان» یا «برآورد فاصله» می‌نامیم.

معمولاً فواصل اطمینان را با (L و U) نمایش می‌دهند که بر حسب نمونه بدست می‌آید

$$P(L < \theta < U) \geq 1-\alpha$$

L: حد پایین اطمینان

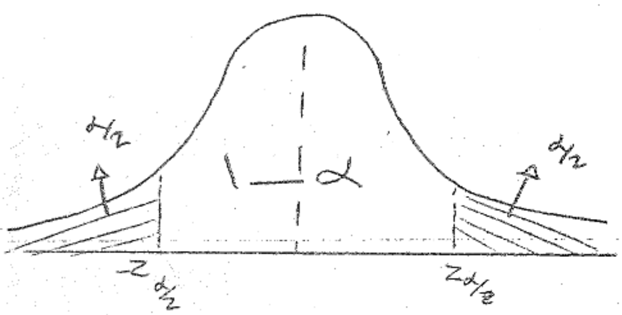
U: حد بالا اطمینان

$1-\alpha$: ضریب اطمینان

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n \xrightarrow{i.i.d} N(\mu, \sigma^2)$ می‌خواهیم فواصل اطمینان را برای μ, σ^2 بدانیم:

ابتدا باید توزیع نرمال را استاندارد کنیم می‌دانیم که استاندارد می‌شود $\longrightarrow \dfrac{\text{امیدش} - \text{هرمتغیر}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

الف ۱۰) برآورد فاصله اطمینان برای μ زمانیکه σ معلوم باشد:



$$\begin{cases} Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \longrightarrow N(0,1) \\ P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \left(\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای μ (میانگین جامعه)

به احتمال $100(1-\alpha)\%$ ، μ در فاصله‌ی فوق قرار دارد.

برای یافتن فاصله اطمینان برای μ هنگامیکه σ معلوم است از کسر $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ استفاده کردیم که تابعی از نمونه $(\bar{X})$ و پارامتر مجهول (μ) است به طوریکه توزیع آن، به پارامتر بستگی ندارد

به چنین کسرها یا توابع از نمونه یا پارامتر مجهول را «کمیت محوری» یا «کمیت لولا» می‌نامند

مقادیر توزیع نمونه ۵ الف ۲۰) برآورد فاصله اطمینان برای μ زمانیکه σ نامعلوم باشد:

از رسم مقدار جامعه می‌فهمیم که توزیع نرمال است ولی μ مجهول است پس ابتدا باید توزیع را

استاندارد کنیم. می‌دانیم که کسر $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$ دارای توزیع تی ـ استیودنت با

$(n-1)$ درجه آزادی است.

$$Z \sim N(0,1) \quad ; \quad f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$Y=Z^2 \sim \chi^2_{(1)} \quad ; \quad f(y)=\frac{y^{\frac{1}{2}-1}\,e^{-y/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})(2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

(گاما)

بطور کلی تابع چگالی $\chi^2_{(n)}$ بصورت زیر است:

$$f(y)=\frac{y^{\frac{n}{2}-1}\,e^{y/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{n/2}}$$

$$T=\frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n) \quad \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \qquad \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$$

مقدار درجه آزادی را S تعیین می‌کند زیرا

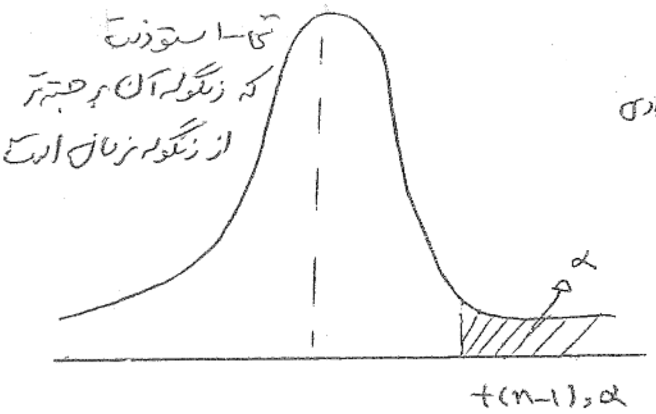
درجه آزادی $(x_i-\bar{x})$، $(n-1)$ می‌باشد پس S^2 متغیر به $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$ می‌باشد پس درجه آزادی

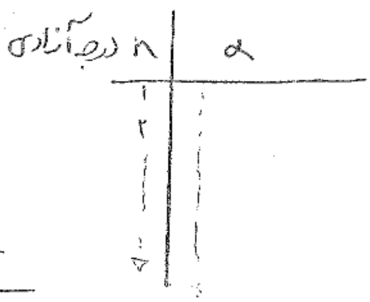
S^2 نیز $(n-1)$ می‌باشد.

توجه) برای درک بهتر از مفهوم درجه آزادی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=100$ را در نظر بگیرید اگر $x_1=20$

$x_2=10$ و $x_3=50$ باشد، x_4 باید ۲۰ باشد یعنی مجبور است که چنین مقداری را اختیار کند درحالیکه

۳ تا متغیرها می‌توانند مقدارهای خود را تغییر دهند پس درجه آزادی این معادله ۳ است.



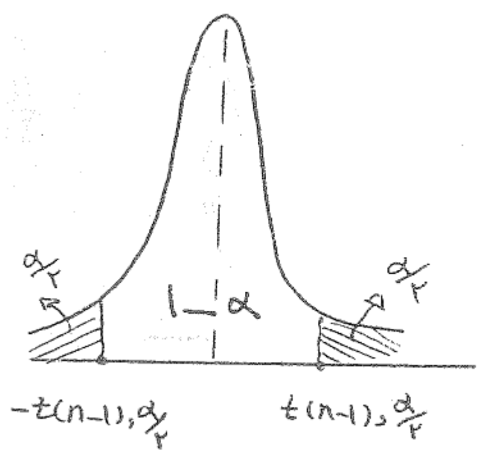


$\underbrace{t(15)}_{n-1},\underbrace{0.025}_{\alpha} = 2.1315$

نسبت قسمت هاشور زده

هرچه $n \uparrow$ ⇐ مقدار t به صفر نزدیک می‌شود.

برای nهای بزرگ رفتار نمودار توزیع t استودنت شبیه‌تر به نمودار توزیع نرمال است یعنی بجای استفاده از جدول t می‌توانیم از جدول Z استفاده کنیم $(n>30)$



$$P\left(-t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}} < T < t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x}-t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

مسئله ۱۶ صفحه ۸۵ کتاب نوفرستی:

نمونه‌ای تصادفی از قیمت کالایی در ۳۶ فروشگاه تهران دارای میانگین ۱۶۵ تومان و انحراف معیار ۹ تومان بوده است. میانگین قیمت این کالا در چه فاصله‌ای قرار دارد اگر ضریب اطمینان: الف) ۰٫۹ باشد.

$n=36$ ، $\bar{x}=165$ $S=9$ ⇐ (چون نداشت) $1-\alpha=0.9$ ⇐ $\frac{\alpha}{2}=0.05$

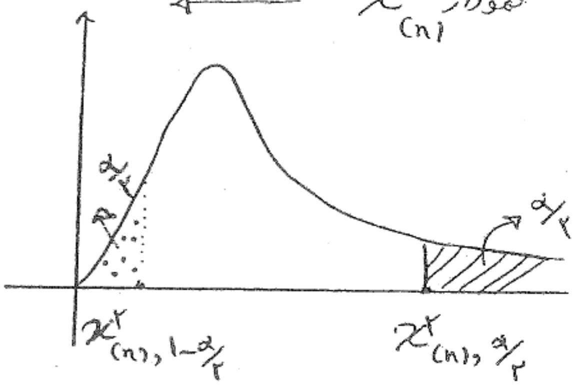
$$P\left(\bar{X}-t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.9$$

$$\left(165 - t_{(35),0.05}\frac{9}{\sqrt{36}}\ ,\ 165 + t_{(35),0.05}\frac{9}{\sqrt{36}}\right)$$

ب) برآورد فاصله اطمینان برای σ^2 :

ب.۱) در حالتیکه μ معلوم باشد

نمودار $\chi^2_{(n)}$



$$\left.\begin{array}{l} x_i \sim N(\mu,\sigma^2) \\ \\ z_i = \dfrac{x_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \end{array}\right\} z_i^2 \sim \chi^2_{(1)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}}$$

کمیت محوری

$$P\left(\chi^2_{(n),1-\alpha/2} < Q < \chi^2_{(n),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2_{n,1-\alpha/2} < \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n),\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n),1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\left(\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n),\alpha/2}}, \frac{\sum(x_i-\mu)^2}{\chi^2_{(n),1-\alpha/2}}\right) \quad \text{یا} \quad \left(\frac{nS_0^2}{\chi^2_{(n),\alpha/2}}, \frac{nS_0^2}{\chi^2_{(n),1-\alpha/2}}\right), \quad S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

ب.۲) زمانیکه μ نامعلوم باشد

$$\boxed{Q = \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}}$$

$$P\left(\chi^2_{(n-1),1-\alpha/2} < Q < \chi^2_{(n-1),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\chi^2_{(n-1),1-\alpha/2} < \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} < \chi^2_{(n-1),\alpha/2}\right)$$

$$P\left(\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{(n-1),\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{(n-1),1-\alpha/2}}\right)$$

فاصله اطمینان برای σ^2

$$\boxed{\left(\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{(n-1),\alpha/2}}, \frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{(n-1),1-\alpha/2}}\right) \text{ یا } \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1),\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1),1-\alpha/2}}\right), \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x})^2}$$

* براساس اطلاعات تمرین ۳٦ یک فاصله اطمینان ۹۰٪ برای σ^2 انتخاب کنید:

$n=36$, $\bar{x}=160$ $\quad S=9 \quad 1-\alpha=0.9$ درا‌ینجا μ نامعلوم است

$$\left(\frac{35 \times 9^2}{\underbrace{\chi^2_{(35)(0.05)}}_{49.802}}, \frac{35 \times 9^2}{\underbrace{\chi^2_{(35)(0.95)}}_{22.465}}\right) \Rightarrow 75 < \sigma^2 < 82$$

* براساس اطلاعات مسئله ۱۹ یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای σ^2 انتخاب کنید:

$$\left.\begin{array}{l}\chi^2_{(30,0.05)} = 16.8 \\ \chi^2_{(40,0.05)} = 24.4\end{array}\right\} \Rightarrow \chi^2_{(35,0.05)} \simeq 20.6$$

$$\cancel{\left(\frac{35 \times 9^2}{\underbrace{\chi^2_{(35)(0.025)}}_{20.6}}, \frac{35 \times 9^2}{\underbrace{\chi^2_{(35)(0.975)}}_{20.6}}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\chi^2_{(30,0.975)} = 46.9 \\ \chi^2_{(40,0.975)} = 59.3\end{array}\right\} \quad \chi^2_{(35,0.975)} \simeq 53.1$$

$$\left(\frac{35 \times 9^2}{20.6}, \frac{35 \times 9^2}{53.1}\right)$$

$$(137.6, \; 53.38)$$

فاصله اطمینان از ۵۳,۳۸ تا ۱۳۷,۶ می باشد.

فاصله اطمینان برای تفاضل میانگین ها و نسبت واریانس ها برای ۲ جامعه مستقل نرمال :

فاصله اطمینان ۲ نمونه ای از ۲ جامعه مستقل

فرض کنید $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \xrightarrow{i.i.d} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و

$$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n} \xrightarrow{i.i.d} N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

الف)

می خواهیم فاصله ی اطمینان برای $(\mu_1-\mu_2)$ را محاسبه کنیم :

می دانیم $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ برآوردگر نقطه ای برای $\mu_1-\mu_2$ می باشد یعنی $\bar{X}_1-\bar{X}_2=\mu_1-\mu_2$

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} \qquad \bar{X}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{i2} \qquad \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \xrightarrow{i.i.d} N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$Var(\bar{X}_1-\bar{X}_2) = Var(\bar{X}_1)+Var(\bar{X}_2) - 2\overset{\text{۰ مستقل اند}}{\cancel{Cov(\bar{X}_1,\bar{X}_2)}} = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

نکته)

$$Var(X) = E[(X-\mu_X)^2] \qquad Var(X+a)=Var(X) \qquad Var(aX)=a^2 Var(X)$$

$$Var(X \pm Y) = Var(X)+Var(Y) \pm 2ab\, \overset{\text{۰ اگر x و y مستقل باشند}}{\cancel{Cov(X,Y)}}$$

$$Cov(X \pm Y, Z) = Cov(X,Z) \pm Cov(Y,Z)$$

$$Var(X \pm Y) = Cov(X \pm Y, X \pm Y) = Cov(X,X) \pm Cov(X,Y) \pm Cov(Y,X) + Cov(Y,Y)$$

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

الف ۱) زمانیکه σ_1^2 و σ_2^2 معلوم باشند :

کمیت محوری

$$\boxed{Z = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0,1)}$$

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای $\mu_1-\mu_2$:

$$\boxed{\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)}$$

الف ۲) زمانیکه σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم باشند اما برابر $(\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2)$: و n_1 و n_2 بزرگ باشند ($n_1, n_2 > 30$)

کمیت محوری :
$$\overset{t}{\cancel{Z}} = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(\cancel{n_1+n_2-2}) \quad \circledast\, N(0,1)$$

* اگر n_1 و n_2 بزرگتر باشند از Z
* اگر n_1 و n_2 کوچکتر باشند از t
* استفاده می‌شود.

درجه آزادی $(n-1)$ ، درجه آزادی $(n-1)$

Variance Poled (ادغام شده) : $S_p^2 = \dfrac{\sum (X_{i1}-\bar{X}_1) + \sum (X_{i2}-\bar{X}_2)^2}{n_1+n_2-2}$

پس درجه آزادی S_p : $(n_1+n_2-2) = (n-1+n-1)$ ⭑ درجه آزادی‌ها جمع می‌شوند چون ۲ جامعه مستقل‌اند

$$\begin{cases} S_1^2 = \dfrac{1}{n_1-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(X_{i1}-\bar{X})^2 \\ S_2^2 = \dfrac{1}{n_2-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2}(X_{i1}-\bar{X})^2 \end{cases} \qquad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$P\left(-t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2} < T < t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\Big((\bar{X}_1-\bar{X}_2) - t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 <$$

$$(\bar{X}_1-\bar{X}_2) + t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\Big) = 1-\alpha$$

فاصله اطمینان برای $(\mu_1-\mu_2)$ ، $100(1-\alpha)\%$:

$$\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

الف. ۳۰) زمانیکه σ_1^2 ، σ_2^2 نامعلوم و نابرابر باشند (S_1^2, S_2^2 هد $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) :

$$T = \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2) - (\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim \underset{\text{درجه آزادی}}{t_{(r)}} \;;\quad r \simeq \left(\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}\right)$$

$$P\left(-t_{(r),\alpha/2} < T < t_{(r),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2) - t_{(r),\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2) + t_{(r),\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1-\alpha$$

فاصله اطمینان برای $(\mu_1-\mu_2)$:

$$\left((\bar{X}_1-\bar{X}_2) \pm t_{(r),\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)$$

مسئله ۲۲ ص ۸۱ :

نمونه	n	میانگین	واریانس
اول	10	3.1	$(0.5)^2$
دوم	8	2.7	$(0.7)^2$

براساس اطلاعات جدول یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای تفاضل میانگین های دو جامعه بیابید :

فرض می کنیم واریانس های نامعلوم جامعه برابر باشند که این خود فرضیه ای است که باید بعداً مورد تایید قرار بگیرد.

پاسخ : $\left((\bar{X}_1+\bar{X}_2) \pm t_{(n_1+n_2-2),\alpha/2}\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{9(0.151)^2+7(0.17)^2}{10+8-2} = 0.15699$$

فاصله اطمینان $(\mu_1-\mu_2)$:

$$\left((3.1+2.17) \pm \overbrace{t_{(16),0.025}}^{2.12} \cdot 0.15699\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}}\right)$$

تأیید برابری واریانس‌ها:

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot f_{(n_2-1)(n_1-1),1-\alpha/2} , \frac{S_1^2}{S_2^2}, f_{(n_2-1)(n_1-1),\alpha/2}\right)$$

$$\left(\frac{0.025}{(0.17)^2}\cdot f(7,9),0.975 , \frac{0.025}{0.149} f(7,9),0.025\right) = \left(0.151\times\frac{1}{4.82} , 0.151\times 4.2\right)$$

$$= (0.11 , 2.142) \Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1 \Rightarrow \boxed{\sigma_1^2=\sigma_2^2}$$

اگر در این فاصله عدد یک هم باشد فرض برابری واریانس‌ها معتبر است.

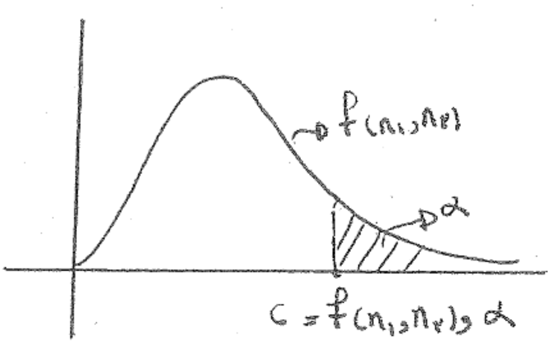
ب) فاصله اطمینان برای نسبت واریانس‌ها $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$:

قبل از پیدا کردن این فاصله توزیع فیشر را معرفی می‌کنیم.

توزیع فیشر: اگر $X \sim \chi^2_{(n_1)}$ و $Y \sim \chi^2_{(n_2)}$ و X و Y مستقل از هم اند.

توزیع فیشر از نسبت ۲ خی‌دو مستقل بدست می‌آید یعنی:
$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim f(n_1,n_2)$$

مقادیرش همواره مثبت است، ۲ درجه آزادی دارد.

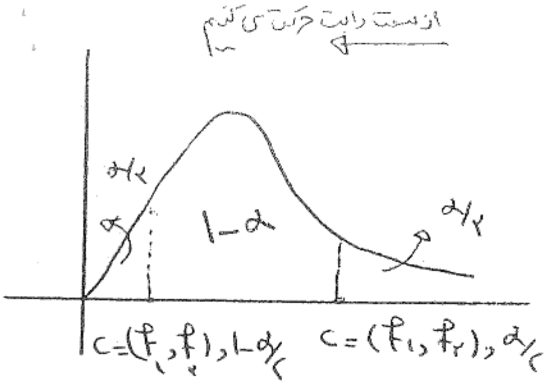


$$Z \sim \chi^2_{(1)}$$
$$Z \sim N(0,1) \text{ مستقل } \Rightarrow T=\frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$
$$Y \sim \chi_{(n)} \text{ مستقل }$$

$$T^2 = \frac{t^2}{Y/n} \sim f(1,n)$$

$$P(F>c)=\alpha$$

$$c = f(12,14),0.05 = 2.53 \qquad P(F>2.53)=0.05$$



$\alpha = 0.05$

$f(12,14),0.025 = 3.05$

$f(12,14)\,1-\frac{0.05}{2} = f(12,14),0.975 = \dfrac{1}{f(14,12),0.025} = 0.3$

تذکر: به راحتی می توان نشان داد که :

$$f(n_1,n_2),\alpha = \frac{1}{f(n_2,n_1),1-\alpha} = \frac{1}{c}$$

$$\alpha = P(F>c) = P\left(\frac{1}{F}<\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{Y/n_2}{X/n_1} \sim f(n_2,n_1)$$

$$P\left(\frac{1}{F}>\frac{1}{c}\right) = 1-\alpha \qquad \frac{1}{c} = f(n_2,n_1),1-\alpha$$

ب. ۱) زمانیکه μ_1 و μ_2 معلوم باشند :

می دانیم که

$$\frac{X_{1i}-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{(X_{1i}-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(1)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(n_1)} \\[2ex] \dfrac{\sum(X_{2i}-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{(n_2)} \end{cases}$$

با فرض :

$$S_{01}^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\mu_1)^2 \quad , \quad S_{02}^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\mu_2)^2$$

نتیجه می گیریم که :

$$\frac{n_1 S_{01}^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(n_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{مستقلند چون } X_{1i} \text{ از } X_{2i} \text{ مستقل است.}$$

$$\frac{n_2 S_{02}^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{(n_2)}$$

طبق تعریف فیشر، خی دو را تقسیم بر درجاتش می کنیم:

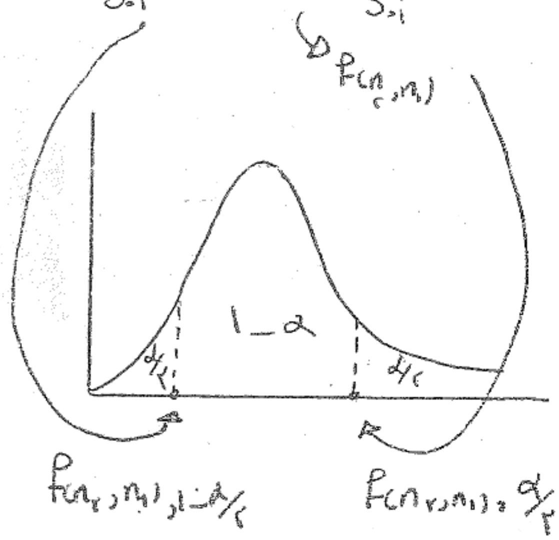
$$F:\ \frac{\frac{n_1 S_{01}^2}{\sigma_1^2}\Big/ n_1}{\frac{n_2 S_{02}^2}{\sigma_2^2}\Big/ n_2} \sim f_{(n_1, n_2)} \Rightarrow F:\ \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim f_{(n_1, n_2)}$$

نتیجه)
$$F':\ \frac{S_{02}^2}{S_{01}^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim f_{(n_2, n_1)}$$

می خواهیم L و U را طوری بسازیم که:
$$P\left(L < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < U\right) = 1-\alpha$$

سمت چپ تساوی را در $\frac{S_{02}^2}{S_{01}^2}$ ضرب می کنیم
$$P\left(\frac{S_{02}^2}{S_{01}^2} L < \frac{S_{02}^2}{S_{01}^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_{02}^2}{S_{01}^2} U\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{S_{02}^2}{S_{01}^2} L < F' < \frac{S_{02}^2}{S_{01}^2} U\right) = 1-\alpha$$



$$\begin{cases} \frac{S_{02}^2}{S_{01}^2}\cdot L = f_{(n_2, n_1), 1-\alpha/2} \\ \frac{S_{02}^2}{S_{01}^2}\cdot U = f_{(n_2, n_1), \alpha/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2}\cdot f_{(n_2, n_1), 1-\alpha/2} \\ U = \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2}\cdot f_{(n_2, n_1), \alpha/2} \end{cases}$$

پس با اطمینان ٪ $100(1-\alpha)$ در زمانیکه μ_1 و μ_2 معلوم اند $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ در فاصله زیر قرار دارد:

$$\left(\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2}\cdot f_{(n_2, n_1), 1-\alpha/2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2}\cdot f_{(n_2, n_1), \alpha/2}\right)$$

— ۲.۰ : زمانیکه μ_1 و μ_2 نامعلوم باشند :

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(n_1-1)} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$$

$$\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{(n_2-1)}$$

$$F: \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{(n_1-1,\, n_2-1)} \quad \text{یا} \quad F': \frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F_{(n_2-1,\, n_1-1)}$$

$$P\left(F_{(n_2-1,n_1-1),1-\alpha/2} < F' < F_{(n_2-1,n_1-1),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{(n_2-1,n_1-1),1-\alpha/2} < \cdots < \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{(n_2-1,n_1-1),\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

نسبت نمونه	$\bar{y}_n = \hat{P}$	میانگین نمونه	
نسبت جامعه	$\bar{y}_N = P$	میانگین جامعه	

$P = \frac{A}{N}$ نسبت جامعه

$p = \frac{a}{n}$ نسبت نمونه

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر عضو iام دارای صفت خاص باشد} \\ 0 & \text{" " " نباشد} \end{cases}$$

— فاصله اطمینان برای پارامتر نسبت P :

فرض می‌کنیم نسبت واحدهای جامعه که دارای صفت خاص اند باشند. می‌خواهیم براساس نمونه‌ای به حجم n (n بزرگ است) فاصله اطمینان برای P را بسازیم. به عبارت دیگر نمونه‌ای به حجم n با توزیع برنولی n داریم $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim B(1,P)$ و برای n های بزرگ می‌توان نشان داد که :

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \;,\; \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right)$$

یک فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای P است. گاهی اوقات به جای $\bar{X}$ از $\hat{P}$ (حد) استفاده می‌کنند.

مثال) از میان ۱۵۰ دانشجوی دانشگاه مازندران ۱۲۰ نفر آنان موافق حضور و غیاب سر کلاس اند

مطلوب است محاسبه یک فاصله اطمینان ۹۰ درصدی برای p نسبت دانشجویان دانشگاه مازندران که موافق این موضوع اند

$$\bar{X}=\hat{P}=\frac{120}{150}=\frac{4}{5}=0.8 \qquad 1-\alpha=\frac{90}{100} \quad \alpha=0.1 \quad \alpha/2=0.05$$

$$\left(0.8-\underbrace{Z_{0.05}}_{1.645}\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{150}}\ ,\ 0.8+Z_{0.05}\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{150}}\right)$$

فاصله اطمینان برای تفاضل نسبت‌ها (p_1-p_2):

فرض می‌کنیم نسبت افراد یک جامعه که دارای صفت یکسانی هستند p_1 و همین نسبت در یک جامعه مستقل از جامعهٔ اول p_2 باشد. می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای از جامعهٔ اول n_1 و جامعه دوم n_2 فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی را برای (p_1-p_2) را بیابیم:

$$\text{مستقل اند}\begin{cases} X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \xrightarrow{i.i.d} B(1,p_1) \\ X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n} \xrightarrow{i.i.d} B(1,p_2) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \hat{p}_1=\bar{X}_1 \\ \hat{p}_2=\bar{X}_2 \end{cases}$$

با توزیع نرمال برای n_1 و n_2 بزرگ:

$$\left((\hat{p}_1-\hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}\right)$$

مثال) از میان ۲۰۰ نفر از دانشجویان دانشگاه مازندران ۱۱۰ نفر و از میان ۱۵۰ نفر از دانشجویان دانشگاه گیلان ۷۵ نفر حداقل یکبار در هفته ورزش می‌کنند. مطلوب است محاسبه یک فاصله اطمینان ٪۹۵ برای تفاضل نسبت دانشجویانی که در ۲ دانشگاه حداقل یکبار در هفته ورزش می‌کنند:

$$1-\alpha=\frac{95}{100} \qquad \alpha/2=0.025$$

$$\begin{cases} \bar{X}_1=\hat{p}_1=\frac{110}{200}=0.55 \\ \bar{X}_2=\hat{p}_2=\frac{75}{150}=0.46 \end{cases} \qquad \left((0.55-0.46) \pm \underbrace{Z_{0.025}}_{1.96}\sqrt{\frac{0.55(1-0.55)}{200}+\frac{0.46(1-0.46)}{150}}\right)$$

« فصل دوم » « آزمون فرضیه‌ها »

تا کنون هدف ما این بوده است که برای پارامترهای مجهول جامعه «میانگین، واریانس و نسبت (p)» برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پیدا کنیم (بر اساس نمونه تصادفی) گاهی اوقات ممکن است به جای تعیین مقادیر تقریبی پارامترها، برآورده یا ادعاهایی را که در مورد پارامترهای مجهول بیان می‌شود را مورد بررسی قرار دهیم. مثلاً ممکن است محققی اعلام نماید که متوسط ضریب هوشی دانشجویان دانشگاه مازندران بیشتر از 110 باشد. برای بررسی چنین ادعایی شایسته است که از جامعه مورد بررسی نمونه‌ای به حجم مناسب اختیار و ضرایب هوشی واحدهای نمونه را حساب می‌کنیم $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ و $(\bar{X})$ میانگین را حساب می‌کنیم. اگر $\bar{X}$ نمونه به طور معناداری بزرگتر از 110 باشد ادعای محقق را می‌پذیریم، در غیر اینصورت رد می‌کنیم. این کار را «آزمون فرضیه» می‌گویند.

برای درک مفاهیم مذکور مفاهیم مربوط به آزمون فرضیه را بیان می‌کنیم.

فرضیه: ادعایی است در مورد پارامتر مجهول جامعه یا خود جامعه (توزیع جامعه) که ممکن است درست یا نادرست باشد و با حرف H نشان می‌دهند و دارای 2 نوع ساده و مرکب است.

فرضیه ساده: تحت آن پارامتر یا توزیع جامعه کاملاً مشخص می‌شود.

فرضیه مرکب: تحت آن پارامتر یا توزیع جامعه کاملاً مشخص نمی‌شود.

مثلاً در مثال قبل μ متوسط ضریب هوشی کل دانشجویان دانشگاه مازندران باشد آنگاه:

$$\left\{ H_0: \mu > 110 \;\middle|\; H_0': \mu < 110 \;\middle|\; H_0'': \mu = 110 \;\middle|\; H_0''': \mu \neq 110 ,\ \mu > 110 \text{ or } \mu < 110 \right\}$$

مرکب یکطرفه — مرکب یکطرفه — ساده — مرکب ۲ طرفه

در آزمون فرضیه‌های آماری، ۲ فرض را با هم مورد بررسی قرار می‌دهیم یکی از آن‌ها فرض صفر (H_0) و

دیگری را فرض مقابل (H_1) می‌نامند.

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 110 \\ H_1: & \mu < 110 \end{cases}$$

آزمون : (Test)

عبارت است از یافتن قاعده یا دستوری (بر اساس نمونه تصادفی) برای پذیرش یا رد فرض‌های H_0 و H_1

رد می‌کنیم H_0 را هرگاه :

$$T: \quad R\,H_0 \longleftrightarrow \bar{X} > 111{,}5$$

$$\begin{cases} H_0: & \mu = 110 \\ H_1: & \mu > 110 \end{cases}$$

اگر $\bar{X} = 112$ باشد پس H_0 رد می‌شود و H_1 قبول می‌شود

اگر $\bar{X} = 110$ باشد پس H_0 رد نمی‌شود

ما باید بهترین تصمیم را بگیریم $\bar{X} > 110$ یا $\bar{X} > 112{,}5$ یا $\bar{X} > 115$ کدام درست‌تر است؟!

اگر بر اساس اطلاعات نمونه، میانگین نمونه از $111{,}5$ بزرگتر شود فرضیه H_0 را رد می‌کنیم، در غیر اینصورت

نمی‌توانیم رد کنیم (می‌گوییم ولی شایسته این است که پس از چند بار رد کردن بسنجیم.)

ما می‌توانیم بی‌نهایت دستور درست کنیم فقط باید بطور معناداری از $\bar{X}$ بزرگتر باشد. عبارت

معناداری در سطرهای بالا در عدد $111{,}5$ مستتر است که برای یافتن آن ابتدا ۲ نوع خطا یا اشتباه در

تصمیم‌گیری را معرفی می‌کنیم.

۱. خطای نوع اول : زمانی مرتکب می‌شویم که فرض H_0 را به ناحق رد کنیم.

۲. خطای نوع دوم : زمانی مرتکب می‌شویم که فرض H_1 را به ناحق رد کنیم.

از آنجائیکه تصمیم گیری براساس نمونه تصادفی است این خطاها را نیز تصادفاً مرتکب می شویم.

واقعیت / تصمیم گیری	H_0 درست	H_1 درست
رد H_0	خطای نوع اول	تصمیم درست
رد H_1	تصمیم درست	خطای نوع دوم

از آنجائیکه خطاهای نوع اول و دوم را اشتباهاً مرتکب می شویم احتمال مرتکب شدن به چنین خطاهایی وجود دارد

احتمال ارتکاب به خطای نوع اول: $\alpha = P(\text{خطای نوع اول}) = P(\text{رد } H_0 \mid H_0 \text{ درست})$

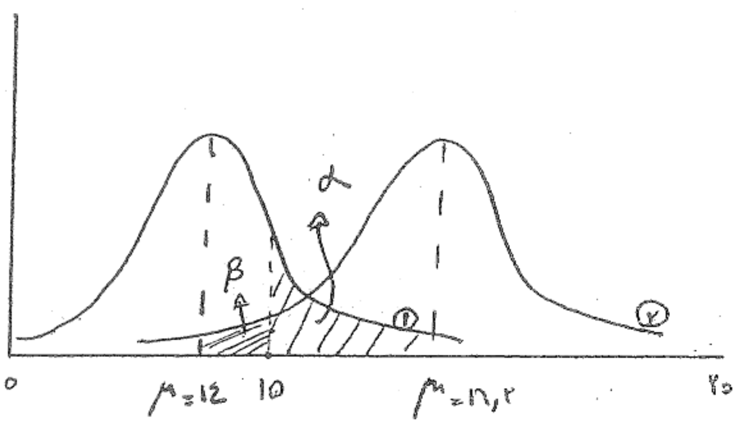
احتمال ارتکاب به خطای نوع دوم: $\beta = P(\text{خطای نوع دوم}) = P(\text{رد } H_1 \mid H_1 \text{ درست})$

مثال) نمرات دانشجویان دارای توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ و انحراف معیار ۱٫۵ است. برای آزمون فرض $H_0: \mu = 14$ در مقابل $H_1: \mu > 14$ هر بار یک نمونه ای به حجم $n = 16$ از دستور زیر استفاده می کنیم.

$$T: \quad R\, H_0 \longleftrightarrow \bar{x} > 15$$

- مطلوب است محاسبه α و β.

- ابتدا باید توزیع نرمال را استاندارد کنیم.



$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{15 - 14}{\frac{1,5}{4}}$$

$$H_0: \begin{cases} \mu = 14 \\ \bar{x} > 15 \end{cases} \Rightarrow \alpha = P(\text{رد } H_0 \mid H_0 \text{ درست}) = P(\bar{X} > 15 \mid \mu = 14) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{15-\mu}{\frac{1/5}{4}} \,\middle|\, \mu=14\right) = P\left(Z > \frac{15-14}{\frac{1/5}{4}}\right) = P\left(Z > \frac{4}{1/5}\right) = P(Z > 2/67) =$$

با استفاده از جدول شماره ۱ $\;= 0/5 - 0/4953 = 0/0047$

$$\beta = P(H_1 \text{ رد } \mid H_1 \text{ درست}) = P(\bar{X} < 15 \mid \mu > 14) = P\left(Z < \frac{15-\mu}{\frac{1/5}{4}} \,\middle|\, \underset{\mu=16/2}{\mu > 14}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{15-16/2}{\frac{1/5}{4}}\right) = P(Z < -3/2) = 0/5 - 0/4993 = 0/00069$$

اگر عدد ۱۵ را در تصمیم گیری را عوض کنیم α و β دیگری بدست می‌آید. سؤال مهم این است که کدام تصمیم‌گیری بهتر است، تصمیمی بهتر است که احتمالات ارتکاب خطاهای نوع اول و دوم را از یک طرف α و β کمترین باشد یا ترکیب خطای آن کمترین باشد. از آنجائیکه مینیمم کردن همزمان α و β میسر نیست در آزمون فرضیه آماری تحت یک α ثابتی (... ، ۰/۰۲۵، ۰/۰۱) که از این به بعد آن را سطح معناداری آزمون یا اندازهٔ آزمون می‌نامیم. سعی می‌کنند آزمونی را انتخاب کنند که β آن کمترین باشد. چنین آزمونی را «تواناترین آزمون» در سطح α می‌نامند. به همین دلیل $\pi = 1-\beta$ «توان آزمون» نامیده می‌شود.

ـ آزمون فرض در مورد پارامترهای توزیع نرمال :

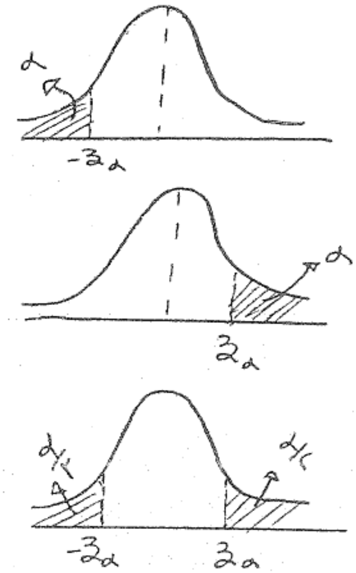
فرض کنید توزیع صفت X در یک جامعه دارای توزیع نرمال با μ و σ باشد. می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای به حجم n ادعاهایی که در مورد μ و σ^2 مطرح شده را بیازمائیم.

الف) آزمون فرضیه در مورد پارامتر μ :

الف.۱) زمانیکه σ معلوم باشد :

بهترین دستورات تصمیم گیری در جدول زیر خلاصه می شود :

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معنادار α
$\mu=\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -z_\alpha$
$\mu=\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha$
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\dfrac{\lvert\bar{X}-\mu_0\rvert}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_{\alpha/2}$



اثبات دستور ۱ :

$$\begin{cases} H_0: & \mu=\mu_0 \\ H_1: & \mu>\mu_0 \end{cases} \qquad T: R\,H_0 \leftrightarrow \bar{X}>\mu_0+\bigcirc \quad \bar{X}>C$$

$$\alpha = P(\text{رد } H_0 \mid \text{درست } H_0) = P(\bar{X}>C \mid \mu=\mu_0) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{C-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \,\Big|\, \mu=\mu_0\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{C-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \quad , \quad \frac{C-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_\alpha \Rightarrow C = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \bar{X}>C \Rightarrow \bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

الف) فرض می کنیم درآمد کارکنان بخش آموزش دانشگاه مازندران دارای توزیع نرمال با میانگین نامعلوم μ و انحراف معیار ۱۰۰ تومان باشد. براساس نمونه ای به حجم ۲۵ میانگین نمونه $\bar{x} = ۴۰۰$ حاصل شد. این فرضیه را که میانگین جامعه برابر با $\mu = ۳۷۵$ را در مقابل فرض دیگر مناسب بیازمائید:

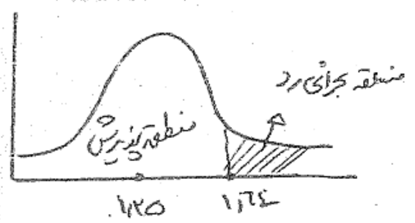
$$\begin{cases} H_0: \mu = ۳۷۵ \\ H_1: \mu \; > \; < \; \neq \; ۳۷۵ \end{cases}$$

$\mu > ۳۷۵$ را انتخاب می کنیم زیرا $\bar{x} = ۴۰۰$ است

اگر توان تشخیص نداشتیم $\neq$ را انتخاب می کنیم.

$$R H_0 \longleftrightarrow \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > z_\alpha \qquad \frac{۴۰۰ - ۳۷۵}{\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲۵}}} > z_{۰٫۰۵} \qquad ۱٫۲۵ \ngtr ۱٫۶۴$$

پس نمی توانیم H_0 را رد کنیم پس می پذیریم.



دلیل: $\neq$ را انتخاب می کنیم ۲ منطقه دارد که کار را سخت تر می کند.

الف. ۲) زمانیکه σ^2 نامعلوم باشد:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معنادار α
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_{(n-1), \alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1), \alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{\lvert\bar{X} - \mu_0\rvert}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1), \frac{\alpha}{2}}$

ب) آزمون فرض در مورد پارامتر σ :

ب.۱) زمانیکه μ معلوم باشد :

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معناداری α
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n,1-\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n,\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n,\alpha/2}$ یا $\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n,1-\alpha/2}$

ب.۲) زمانیکه μ نامعلوم باشد :

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معناداری α
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{(n-1),1-\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(n-1),\alpha}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(n-1),\alpha/2}$ یا $\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{(n-1),1-\alpha/2}$

$$\sum (x_i-\bar{x})^2 = (n-1)S^2 \quad , \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x})^2$$

مثال) براساس نمونه‌ای به حجم $n=۲۵$ از کارکنان دانشگاه مازندران میانگین درآمد نمونه $\bar{x}=۴۰۱—$

و $S=۷۵۱—$ به دست آمد. با فرض آنکه توزیع جامعه نرمال باشد فرضیه صفر $H_0: \mu_0=۳۷۵۱—$ را در مقابل

$H_1: \mu > ۳۷۵۱—$ را بیازمائید:

$$\begin{cases} H_0: \mu_0 = ۳۷۵۱— \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$$

$$RH_0 \longleftrightarrow \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1),\alpha}$$

$$\frac{۴۰۱— - (۳۷۵۱—)}{\frac{۷۵۱—}{\sqrt{۲۵}}} > t_{(۲۴),۰٫۰۵} \qquad ۱٫۶۶ \not> ۱٫۷۱۰۹$$

پس H_0 رد نمی‌شود

ـ آزمون برابری میانگین‌ها (تفاضل میانگین‌ها): (۲ جامعه)

H_0	H_1	الف.۱) زمانیکه σ_1^2 و σ_2^2 معلوم باشند	الف.۲) زمانیکه σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم اما برابر باشند
$\mu_1-\mu_2=a$	$\mu_1-\mu_2<a$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < -Z_\alpha$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} < -t_{(n_1+n_2-2),\alpha}$
$\mu_1-\mu_2=a$	$\mu_1-\mu_2>a$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_\alpha$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{(n_1+n_2-2),\alpha}$
$\mu_1-\mu_2=a$	$\mu_1-\mu_2\neq a$	$\frac{\lvert(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > Z_{\alpha/2}$	$\frac{\lvert(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a\rvert}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{(n_1,n_2-2),\alpha/2}$

$$S_p^2 = \frac{\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

مثال) فرض می‌کنیم نمرات درس آمار ۲ دانشجویان دارای توزیع نرمال با میانگین μ_1 و انحراف معیار ۲ است و

نمرات این درس در دانشگاه دیگر دارای توزیع نرمال با میانگین μ_2 و انحراف معیار ۱٫۵ است. بر اساس نمونه‌ای به حجم $n_1=16$ از

جامعه اول میانگین نمونه $\bar{x}_1=14{,}5$ و در جامعه دوم $n_2=20$ و $\bar{x}_2=12$ بدست آمده است.

فرض برابری میانگین ۲ جامعه را در مقابل فرض دیگر مناسب را بیازمایید:

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1-\mu_2=0 \\ H_1: & \mu_1-\mu_2>0 \end{cases} \qquad R\,H_0 \longleftrightarrow \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_\alpha$$

$$\frac{(14{,}5-12)-0}{\sqrt{\frac{4}{16}+\frac{2{,}25}{20}}} > z_{0{,}05} \qquad 4{,}15 > 1{,}64$$

پس H_0 رد می‌شود.

الف.۳) زمانیکه σ_1^2 و σ_2^2 نامعلوم و نابرابر باشند:

H_0	H_1	ناحیه دستور رد H_0 در سطح معنادار α
$\mu_1-\mu_2=a$	$\mu_1-\mu_2<a$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} < -t_{(r),\alpha}$
$\mu_1-\mu_2=a$	$\mu_1-\mu_2>a$	$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-a}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} > t_{(r),\alpha}$
$\mu_1-\mu_2=a$	$\mu_1-\mu_2\neq a$	$\frac{\lvert(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\rvert-a}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} > t_{(r),\alpha/2}$

$$r=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} \quad , \quad S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2$$

تذکر مهم: همانطور که اشاره شد برای استفاده از آزمون های ارائه شده در جداول الف.۲، الف.۳ که صورت به آزمون t مستقل هستند شایسته است که ابتدا فرض برابری واریانس های نامعلوم مورد بررسی قرار گیرد. اگر تایید نشد از جدول الف.۲ استفاده می کنیم و اگر تایید شد از جدول الف.۳ استفاده می کنیم.

ب) آزمون برابری واریانس ها (نسبت واریانس ها) $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$:

ب.۱) μ_1 و μ_2 معلوم باشند:

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معناداری α
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<1$	$\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} < f_{(n_1,n_2),1-\alpha}$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1$	$\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} > f_{(n_1,n_2),\alpha}$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1$	$\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} > f_{(n_1,n_2),\alpha/2}$ یا $\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} < f_{(n_1,n_2),1-\alpha/2}$

$$S_{01}^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\mu_1)^2 \qquad S_{02}^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\mu_2)^2$$

اثبات دستور شماره ۲ : $\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} > f_{(n_1,n_2),\alpha}$

از واریانس های جامعه تخمین اش را داریم یعنی S_{01}^2 و S_{02}^2 پس:

$$\begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}>1 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} > c\,? \Rightarrow$$

به کمک α پیدا می شود

$$\frac{n_1 S_{01}^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sum (x_{1i}-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{(n_1)}$$

همچنین می‌دانیم که خی دو تقسیم بر درجه آزادی‌اش تبدیل به فیشر می‌شود.

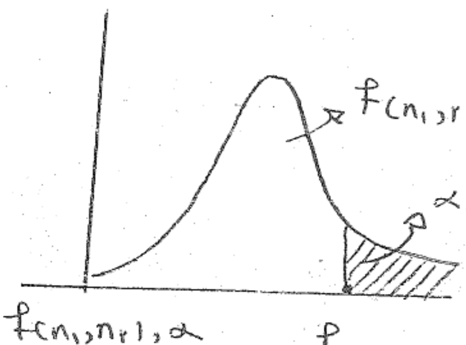
$$X \sim \chi^2(n_1) \qquad Y \sim \chi^2(n_2) \qquad \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim f(n_1, n_2)$$

$$F = \frac{\frac{n_1 S_{01}^2}{\sigma_1^2}\Big/ n_1}{\frac{n_2 S_{02}^2}{\sigma_2^2}\Big/ n_2} = \frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim f(n_1, n_2) \qquad \alpha = P(F > c)$$

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست}) = P\left(\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} > c \;\Big|\; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$$

$$= P\left(\frac{S_{01}^2}{S_{02}^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > c \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \;\Big|\; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$$

$$= P\left(F > c\,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \;\Big|\; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1\right)$$



$c = f(n_1, n_2), \alpha$

ب. ۲) زمانی که μ_1 و μ_2 نامعلوم باشند:

H_0	H_1	ناحیه رد H_0 در سطح معناداری α
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} < f(n_1-1, n_2-1), 1-\alpha/2$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} > f(n_1-1, n_2-1), \alpha/2$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} > f(n_1-1, n_2-1), \alpha/2$ یا $\frac{S_1^2}{S_2^2} < f(n_1-1, n_2-1), 1-\alpha/2$

آزمون t زوجی یا آزمون برابری میانگین‌های ۲ جامعه با توزیع نرمال وابسته : (۲ جامعه)

فرض کنید $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n} \xrightarrow{i.i.d} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n} \xrightarrow{i.i.d} N(\mu_2, \sigma_2^2)$

و مستقل از هم نیستند. برای آزمون تفاضل $(\mu_1-\mu_2)$ ابتدا متغیری به نام D معرفی کرده، برابر $D=X_1-X_2$

- در اینجا $n_1=n_2=n$ می‌باشد چون باید هر یک جفت داشته باشند تا از هم کم شوند.

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معناداری α
$\mu_D=\mu_1-\mu_2=a$	$\mu_D<a$	$\dfrac{\bar{D}-a}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} < -t_{(n-1),\alpha}$
$\mu_D=a$	$\mu_D>a$	$\dfrac{\bar{D}-a}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1),\alpha}$
$\mu_D=a$	$\mu_D\neq a$	$\dfrac{\lvert\bar{D}-a\rvert}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}}$

$$S_D^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i-\bar{D})^2$$

۲- آزمون نسبت :

فرض کنید نسبت افرادی یک جامعه که دارای صفت خاصی باشند را با احتمال P آن را دارد و با احتمال $(1-P)$ آن صفت را ندارد. می‌خواهیم با نمونه به حجم n ادعاهایی را که در مورد P مطرح می‌شود را بیازمائیم. برای چنین آزمونی باید n بزرگ باشد چون توزیع برنولی است و باید از قضیه حد مرکزی استفاده کنیم که می‌بایست n بزرگ باشد.

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معنادار α
$p=p_0$	$p<p_0$	$\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}<-z_\alpha$
$p=p_0$	$p>p_0$	$\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}>z_\alpha$
$p=p_0$	$p\neq p_0$	$\dfrac{\lvert\hat{p}-p_0\rvert}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}>z_{\alpha/2}$

- آزمون تفاضل نسبت‌ها (p_1-p_2) یا برابری نسبت‌ها :

H_0	H_1	دستور رد H_0 در سطح معنادار α
$p_1=p_2$ $(p_1-p_2)=0$	$p_1<p_2$ $p_1-p_2<0$	$\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}<-z_\alpha$
$p_1=p_2$ $(p_1-p_2)=0$	$p_1>p_2$ $p_1-p_2>0$	$\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}>z_\alpha$
$p_1=p_2$ $(p_1-p_2)=0$	$p_1\neq p_2$ $p_1-p_2\neq 0$	$\dfrac{\lvert\hat{p}_1-\hat{p}_2\rvert}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}>z_{\alpha/2}$

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n} \xrightarrow{i.i.d} B(1, p_1)$$

$$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n} \xrightarrow{i.i.d} B(1, p_2)$$

$$\hat{p}=\frac{n_1\bar{X}_1+n_2\bar{X}_2}{n_1+n_2}\quad,\quad \hat{p}_1=\bar{X}_1\quad,\quad \hat{p}_2=\bar{X}_2$$

مثال: یک مطالعه آماری در ۲ منطقه صورت گرفته یک نمونه ۳۰۰ تایی از منطقه اول نشان داده که ۱۸۵ مورد دارای سیستم مورد نظر هستند در صورتیکه در یک نمونه ۲۰۰ تایی از منطقه دوم ۷۵ مورد سیستم را دارا هستند. آزمون تفاضل نسبت‌ها را در این مورد محاسبه کنید:

$$\begin{cases} \hat{P}_1 = \frac{185}{300} = 0.616 \\ n_1 = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{P}_2 = \frac{75}{200} = 0.375 \\ n_2 = 200 \end{cases} \quad \hat{P} = \frac{185+75}{300+200} = 0.52$$

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases} \qquad R\,H_0 \Longleftrightarrow \frac{|0.616 - 0.375|}{\sqrt{0.52(1-0.52)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{200}\right)}} > Z_{0.005} \qquad 10.8 > 2.58$$

H0 رد می‌شود.

مسئله شماره ۶ صفحه ۱۴۴ کتاب نوبختی:

سازنده یک وسیله خانگی ادعا کرده است که ۶۰٪ درصد محصولات کارخانه که ده سال قبل فروخته شده هنوز کار می‌کنند. برای بررسی این ادعا ۲۰۰ عدد از ساخته‌های ده سال پیش کارخانه به طور تصادفی انتخاب شده و مشاهده شد که ۱۰۰ عدد از آنها هنوز کار می‌کنند. با توجه به مشاهدات فوق آیا می‌توان ادعای صاحب کارخانه را پذیرفت؟

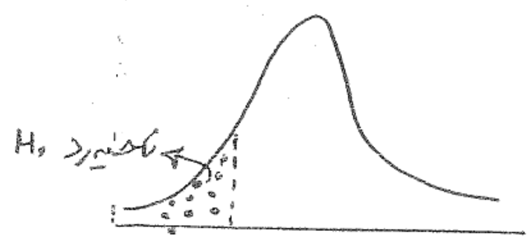
$P_0 = 60\%$ $\quad \hat{P} = \frac{100}{200} = 0.5 \quad n = 200$

چون $\hat{P}$ کوچکتر P_0 است پس علامت کوچکتر را برمی‌گزینیم

$$\begin{cases} H_0 : P = 0.6 \\ H_1 : P < 0.6 \end{cases} \qquad R\,H_0 \Longleftrightarrow \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} < -Z_\alpha$$

$$\frac{0.5 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{200}}} < -1.64 \qquad -2.9 < -1.645$$

پس H0 رد می‌شود



دو نوع باطری مورد آزمایش قرار گرفته‌اند تا متوسط عمر آنها تعیین شود. به طور تصادفی ۲۵ باطری نوع «الف» و ۲۵ باطری نوع «ب» انتخاب شده و مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. نتیجه در جدول زیر خلاصه شده است.

باطری نوع «الف»	باطری نوع «ب»
$\bar{x}_1 = 110.6$ ساعت	$\bar{x}_2 = 103.8$ ساعت
$S_1 = 10$ ساعت	$S_2 = 12$ ساعت
۱۶ باطری بیش از ۱۰۰ ساعت عمر کرده‌اند	۱۴ باطری بیش از ۱۰۰ ساعت عمر کرده‌اند
$\hat{p}_1 = \frac{16}{25} = .64$	$\hat{p}_2 = \frac{14}{25} = .56$

با استفاده از آزمون فرض در خصوص موارد زیر نتیجه‌گیری کنید: $(\alpha = .1)$

الف) آیا نسبت باطری‌های نوع الف که بیش از ۱۰۰ ساعت عمر می‌کنند ۵/. است؟

$$\begin{cases} H_0: P_0 = .5 \\ H_1: P > P_0 \end{cases} \qquad RH_0 \Longleftrightarrow \frac{(\hat{P} - P_0)}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} > z_\alpha \qquad \frac{.64 - .5}{\sqrt{\frac{.5 \times .5}{25}}} > 1.28 \qquad 1.4 > 1.28$$

H_0 رد می‌شود

طع $\alpha = .05$ $\quad 1.4 \not> 1.645$ یعنی H_0 رد نمی‌شود یعنی اگر دقت آزمون را بالا ببریم H_0 رد نمی‌شود.

ب) آیا دلیلی وجود دارد که باطری‌های نوع الف به طور متوسط بیشتر از ۹۵ ساعت عمر می‌کنند؟

$$\begin{cases} H_0: \mu_0 = 95 \\ H_1: \mu_1 > 95 \end{cases} \qquad RH_0 \Longleftrightarrow \frac{\bar{x}_1 - \mu_1}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1),\alpha} \qquad \frac{110.6 - 95}{\frac{10}{\sqrt{25}}} > t_{(24),.1}$$

$7.8 > 1.3178$ پس H_0 رد می‌شود

ج) آیا اختلافی بین پراکندگی عمر دو نوع باطری وجود دارد؟ خیر

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases} \qquad RH_0 \Longleftrightarrow \frac{S_1^2}{S_2^2} < f_{(n_1-1, n_2-1), 1-\alpha/2}$$

$$\frac{10^2}{12^2} < f_{(24,24),.95} \quad \text{یا} \quad \frac{10^2}{12^2} > f_{(24,24),.05}$$

$$.69 \not< \frac{1}{1.98} = .50 \qquad .69 \not> 1.98$$

H_0 رد نمی‌شود.

آیا اختلافی بین متوسط عمر باطری نوع الف و ب وجود دارد؟ خیر

...زمی استفاده از جدول آزمون برابری میانگین‌ها (الف ۲.) این است که ابتدا باید برابری واریانس‌های نامعلوم تأیید شود
...در قسمت ج تایید شد.

$$\begin{cases} H_0: \mu_1=\mu_2 \\ H_1: \mu_1\neq\mu_2 \end{cases} \qquad R\,H_0 \Longleftrightarrow \frac{|(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-a|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{(n_1+n_2-2),\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{|(112.6-102.8)-0|}{11.56\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}} > t_{(48),0.05} \Rightarrow 0.97 \not> 1.67$$

H_0 رد نشود

<u>مسئله ۱۵</u> ص <u>۱۴۵</u>

وزارت نیرو مایل است میزان مصرف برق خانوارها را در ۳ منطقه تهران با یکدیگر مقایسه کند. بدین منظور میزان برق مصرفی در فصل زمستان ثبت شده و نتایج زیر به دست آمده است:

منطقه الف	منطقه ب	منطقه ج
خانوار $n_1=16$	خانوار $n_2=21$	خانوار $n_3=25$
تومان $\bar{x}_1=910$	تومان $\bar{x}_2=680$	تومان $\bar{x}_3=850$
تومان $S_1=260$	تومان $S_2=180$	تومان $S_3=300$

با استفاده از آزمون فرضیه در خصوص هر یک از موارد زیر نتیجه‌گیری کنید $(\alpha=0.05)$.

الف) آیا می‌توان گفت که در منطقه الف متوسط برق مصرفی بالای ۸۰۰ تومان است؟

$$\begin{cases} H_0: \mu_1=800 \\ H_1: \mu_1>800 \end{cases} \qquad R\,H_0 \Longleftrightarrow \frac{\bar{x}-\mu_1}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_{(n-1),\alpha}$$

$$\frac{910-800}{\frac{260}{\sqrt{16}}} > t_{(15),0.05} \Rightarrow \underset{t\ \text{محاسباتی}}{1.69} \not> \underset{t\ \text{جدول}}{1.75}$$

رد نمی‌شود.

ب) زمانی که اختلاف میان ۲ μ را خواستیم سراغ برابر واریانس‌ها می‌رویم!

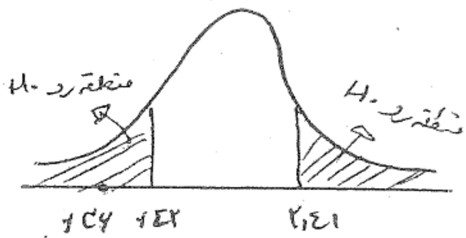
۳) آیا بین پراکندگی میزان برق مصرفی منطقه ب و ج اختلافی وجود دارد؟

$$\begin{cases} H_0: \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \\ H_1: \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2 \end{cases} \qquad RH_0 \iff \frac{S_2^2}{S_3^2} < f_{(n_2-1, n_3-1), 1-\alpha/2}$$

$$\text{یا} \quad \frac{S_2^2}{S_3^2} > f_{(n_2-1, n_3-1), \alpha/2}$$

$$\frac{(18.0)^2}{(30.0)^2} < f_{(20,24), 0.975} = \frac{1}{f_{(24,20), 0.025}} \Rightarrow 0.36 < 0.42$$ H_0 رد می‌شود

$$\frac{(18.0)^2}{(30.0)^2} > f_{(20,24), 0.025} \Rightarrow 0.36 \ngtr 2.41$$



چون ۲ طرفه است پس ناحیه بحرانی داریم

ج) آیا دلیلی وجود دارد که بتوان میزان انحراف معیار برق مصرفی منطقه الف را بیشتر از ۲۰ تومان داشت؟

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1 = 20 \\ H_1: \sigma_1 > 20 \end{cases} \quad \sigma_1^2 = 400 \qquad RH_0 \iff \frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} > \chi^2_{(n-1), \alpha}$$

$$25.45 > 24.96$$ پس H_0 رد می‌شود

د) آیا متوسط میزان برق مصرفی در منطقه الف متفاوت از منطقه ج است؟ مراسلم

ابتدا باید آزمون برابری واریانس‌ها را انجام داد.

$$\begin{cases} H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} = 1 \\ H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} \neq 1 \end{cases} \qquad RH_0 \iff \frac{S_1^2}{S_3^2} < f_{(n_1-1),(n_3-1), 1-\alpha/2} \qquad 0.75 \nless 0.37$$

$$\text{یا} \quad \frac{S_1^2}{S_3^2} > f_{(n_1-1)(n_3-1), \alpha/2} \qquad 0.75 \ngtr 2.4$$

پس H_0 رد نمی‌شود یعنی واریانس‌ها برابرند پس از جدول الف. ۲ بخش نکته واریانس‌ها نامعلوم اما برابر استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \qquad R\,H_0 \iff \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{(n_1+n_2-2),\ \alpha/2}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{(n_1+n_2-2)}}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{15(240)^2+24(300)^2}{39}} = 285.3$$

$$\frac{|916-850|}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{25}}} > t_{(39),\ 0.05}$$

$$0.6571 \not> 2.0227$$

H_0 رد نمی شود

- آزمون های خی - دو (کای - دو): chi_square

۱- آزمون نیکویی برازش ۲- آزمون برابری نسبت ها ۳- آزمون استقلال

۱- آزمون نیکویی برازش:

فرض کنید نتیجه ی یک آزمایش بتواند به k کلاس $A_1, A_2, \dots, A_k$ تعلق داشته باشد به ترتیب با احتمال $P_1, P_2, \dots, P_k$ می خواهیم ادعاهایی که در مورد پارامترهای P_1 تا P_k مطرح می شود را آزمون کنیم. برای مثال داریم:

$$\begin{cases} H_0: P_1 = P_{10},\ P_2 = P_{20},\ \dots,\ P_k = P_{k0} \\ H_1: \exists\, i \ni P_i \neq P_{i0} \end{cases}$$

حداقل یکی از تساوی های بالا برقرار نیست

برای آزمون چنین فرض هایی از جامعه مورد بررسی نمونه ای به حجم n انتخاب می کنیم و جدولی به صورت زیر حاصل می شود:

f فراوانی مشاهده شده $\downarrow$ o

f_t فراوانی مورد انتظار $\downarrow$ e

کلاس‌ها	A_1	A_2	...	A_k	جمع
فراوانی مشاهده شده (f)	O_1	O_2	...	O_k	n
فراوانی مورد انتظار (f_t)	$e_1=nP_{10}$	$e_2=nP_{20}$	...	$e_k=nP_{k0}$	n

برای تصمیم‌گیری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

رد می‌کنیم H_0 را هرگاه:
$$R\,H_0 \iff \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i-e_i)^2}{e_i} > \chi^2_{(k-1),\alpha}$$

مثال، درآمد کارکنان دانشگاه به صورت جدول زیر می‌باشد. این فرضیه را که توزیع کلاس‌های درآمدها یکنواخت است را مورد بررسی و آزمون قرار دهید:

کلاس‌ها	≤ ۵۰	$(۵۰-۸۰]$	$(۸۰-۱۰۰)$	$۱۰۰\leq$	
o_i	۳۰	۱۵	۲۸	۲۷	$n=۱۰۰$
e_i	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	
$\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$	۱	۴	۰/۳۶	۰/۱۶	$۵/۵۲ = \sum_{i=1}^{4} \frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$

برای محاسبه ابتدا باید فرض H_0 را بنویسیم:

$$\begin{cases} H_0: P_1, P_2, P_3, P_4 = \frac{1}{4} \\ H_1: \text{حداقل یکی از تساوی‌های بالا برقرار نیست} \end{cases} \qquad R\,H_0 \iff \sum_{i=1}^{4} \frac{(o_i-e_i)^2}{e_i} > \chi^2_{(4-1),(0.05)}$$

$$۵/۵۲ \not> ۷/۸۱۵$$
پس H_0 رد نمی‌شود

تذکر: هرگاه α در صورت سؤال داده نشده باشد برابر ۰/۰۵ قرار می‌دهیم.

تذکر مهم: اگر تحت فرض H_0 مقادیر P_i کاملاً مشخص نشده (یعنی P_iها را ندهند) و لازم باشد برای محاسبه‌ی P_iها تخمین آن‌ها، پارامتر مجهول مثلاً r تا تخمین زده شود (که بدین ترتیب P_iها تخمین زده می‌شود) در این صورت رد می‌کنیم فرض H_0 را هرگاه:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i-\hat{e}_i)^2}{\hat{e}_i} > \chi^2_{(k-1-r),\alpha}$$

تعیین پارامترها براساس مشاهدات نیز احتیاج است و این نیز کم کردن درجه آزادی.

چون خی‌دو شایسته است که تعدادی های طبقات حداقل ۵ باشد. برای آنکه نسبت‌ها از توزیع دوجمله‌ای (برنولی) آنگاه به کمک قضیه حد مرکزی، نرمال استاندارد می‌شوند و نرمال استاندارد که به توان ۲ برسد به χ^2 تبدیل می‌شود. اگر تعدادی خانه‌ای کمتر از ۵ باشد کلاس‌های مجاور را ادغام می‌کنیم زیرا اگر ادغام نکنیم درجه آزادی صفر یا منفی شود.

مثال ۱۳۹

فرض کنید مدیر فروش کارخانه شیمیایی می‌خواهد بداند که میزان فروش روزانه محلول شیمیایی کارخانه دارای توزیع نرمال است یا نه؟ تا از آن در زمینه برنامه‌ریزی موجودی انبار استفاده کند. نمونه‌ای از فروش ۲۰۰ روز بطور تصادفی انتخاب شده و نتایج در جدول زیر خلاصه شده است.

تعداد روزها f	نماینده طبقه x	میزان فروش به هزار لیتر	$\hat{e}_i = n\hat{P}_{i0}$	$\frac{(o_i-\hat{e}_i)^2}{\hat{e}_i}$
۹ (ادغام)	-	۳۴> (ادغام)		
۱۳	۳۴٫۷۵	۳۴ـ۳۵٫۵	۷٫۱۸	۴٫۷۱
۲۰	۳۶٫۲۵	۳۵٫۵ـ۳۷	۱۵٫۸۴	۱٫۰۹۲
۳۵	۳۷٫۷۵	۳۷ـ۳۸٫۵	۳۱٫۵۴	٫۵۱۴
۴۳	۳۹٫۲۵	۳۸٫۵ـ۴۰	۴۵٫۱۴	٫۱۰۱
۵۱	۴۰٫۷۵	۴۰ـ۴۱٫۵	۴۵٫۱۴	٫۷۶
۲۷	۴۲٫۲۵	۴۱٫۵ـ۴۳	۳۱٫۸۴	٫۷۲۵
۱۵ (ادغام)	۴۳٫۷۵	۴۳ـ۴۴٫۵	۱٫۲۶	۷۵٫۲۹
۱	۴۵٫۲۵	۴۴٫۵ـ۴۶ (ادغام)		
۰	-	<۴۶		

$$P_1 = P(X < 35.5) = P\left(Z < \frac{35.5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{35.5-\bar{X}}{S_b}\right)$$

آنجائیکه μ و σ معلوم نیستند شایسته است که براساس مشاهدات داخل جدول ابتدا μ و σ را تخمین زده یعنی S_b را حساب کنیم $S_b = 2.5$ و $\bar{X} = 40$

$$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 = \cdots = P_i = 1 \\ H_1: \text{حداقل یکی از تساوی‌های بالا برقرار نباشد} \end{cases}$$

$$R\,H_0 \iff \sum_{i=1}^{7} \frac{(o_i-\hat{e}_i)^2}{\hat{e}_i} > \chi^2_{(k-1-r),\alpha}$$

$$\hat{P}_1 = P(X<35.5) = P\left(Z<\frac{35.5-\bar{X}}{S_b}\right) = P(Z<-1.81) = 0.5 - 0.4641 = 0.0359$$

$$\hat{P}_2 = P(35.5<X<37) = 0.0792 \qquad \hat{P}_3 = P(37<X<38.5) = P(-1.2<Z<-0.6) = 0.1592$$

$$\hat{P}_4 = P(38.5<X<40) = 0.2257 \qquad \hat{P}_5 = P(40<X<41.5) = 0.2257$$

$$\hat{P}_6 = P(41.5<X<44.5) = P(0.6<Z<1.2) = 0.1592$$

$$P_7 = P(44<X<44.5) = 0.0792 \xleftrightarrow{\text{جمع می‌شوند}} P_8 = P(X>44.5) = 0.0359$$

رد می‌کنیم H_0 را هرگاه:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{(o_i-\hat{e}_i)^2}{\hat{e}_i} > \chi^2_{(k-1-2),\alpha} \qquad 84 > \chi^2_{(4)(0.05)} \qquad 83 > 9.488$$

۲) آزمون برابری نسبت‌ها:

فرض کنید واحدهای یک جامعه بتوانند با نسبت‌های $p_1, p_2, \dots, p_k$ به کلاس‌های $A_1, A_2, \dots, A_k$ تعلق داشته باشند. همین نسبت‌ها در جامعه دیگر مستقل از اولی $q_1, q_2, \dots, q_k$ باشد، $\sum_{i=1}^{k} q_i = 1$ ، $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. می‌خواهیم فرضیه

$$\begin{cases} H_0: p_1=q_1, \dots, p_k=q_k \\ H_1: \text{حداقل یکی از تساوی‌ها برقرار نباشد} \end{cases}$$

را بیازماییم.

برای انجام این آزمون، از جامعه اول نمونه‌ای به حجم n_1 و از جامعه دوم به حجم n_2 اختیار کرده در اینصورت جدول به شکل زیر بدست می‌آید:

کلاس (A_i)	A_1	A_2	......	A_k	جمع
فراوانی مشاهده شده در نمونه انتخابی از جامعه اول	O_{11}	O_{12}		O_{1k}	$n_1 = \sum_{i=1}^{k} O_{1i}$
فراوانی مشاهده شده از نمونه انتخابی جامعه دوم	O_{21}	O_{22}		O_{2k}	$n_2 = \sum_{i=1}^{k} O_{2i}$
$r_i = \frac{O_{1i}+O_{2i}}{n_1+n_2}$	r_1	r_2		r_k	$\sum_{i=1}^{k} r_i = 1$

$$R\,H_0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_{1i}-n_1 r_i)^2}{n_1 r_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_{2i}-n_2 r_i)^2}{n_2 r_i} = (k-1)+(k-1) > \chi^2_{(k-1),\alpha}$$

مثال) آیا توزیع درآمدها (نسبت درآمدها) در ۲ جامعه یکسان است؟

کلاس‌ها	≤۵۰	(۵۰-۸۰]	(۸۰-۱۰۰]	۱۰۰<	مج.
نمونه انتخابی از دانشگاه مازندران	۳۰	۱۵	۲۸	۲۷	$n_1=100$
نمونه انتخابی از دانشگاه گیلان	۳۵	۴۰	۴۵	۳۰	$n_2=150$
r_i	$\frac{۶۵}{۲۵۰}=۰/۲۶$	$\frac{۵۵}{۲۵۰}=۰/۲۲$	$\frac{۷۳}{۲۵۰}=۰/۲۹$	$\frac{۵۷}{۲۵۰}=۰/۲۳$	۱

فرض کنید مقادیر (اطلاعات) ۲ متغیر X و Y از یک جامعه را بتوانیم به $(r \times c)$ کلاس نسبت دهیم و به صورت جدول زیر نمایش می دهیم.

X \ Y	B_1	B_2	...	B_c	جمع
A_1	P_{11}	P_{12}	...	P_{1c}	P_{10}
A_2	P_{21}	P_{22}	...	P_{2c}	P_{20}
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_r	P_{r1}	P_{r2}	...	P_{rc}	P_{r0}
جمع	P_{01}	P_{02}		P_{0c}	1

$$\begin{cases} P_{10} = \sum_{j=1}^{c} P_{1j} \\ P_{01} = \sum_{i=1}^{r} P_{i1} \end{cases}$$

می دانیم که اگر دو صفت X و Y بخواهند مستقل باشند بایستی به ازای هر $i=1,2,\dots,r$ و $j=1,2,\dots,c$ ، $P_{ij}=P_{i0}\cdot P_{0j}$ باشد بنابراین اگر بخواهیم فرض H_0 در مقابل فرض H_1 را آزمون کنیم تنها این است که:

$$\begin{cases} H_0: & \text{X و Y مستقل اند} \\ H_1: & \text{X و Y مستقل از هم نیستند} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0: & P_{ij}=P_{i0}\cdot P_{0j} \quad \forall (i,j) \\ H_1: & \exists (i,j) \ni \quad P_{ij} \neq P_{i0}\cdot P_{0j} \end{cases}$$

برای آزمون فرض های فوق که از جامعه مورد مطالعه نمونه ای به حجم n اختیار کرده و اطلاعات نمونه را در جدول زیر خلاصه می کنیم.

$$\begin{array}{c|cccc|c} X \backslash Y & \overbrace{B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_c}^{(c-1)\,\text{تا}} & & & & \text{جمع} \\ \hline A_1 & O_{11} & O_{12} & \dots & O_{1c} & O_{10} \\ A_2 & O_{21} & O_{22} & \dots & O_{2c} & O_{20} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_r & O_{r1} & O_{r2} & \dots & O_{rc} & O_{r0} \\ \hline & O_{01} & O_{02} & & O_{0c} & n \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} (r-1)\,\text{تا}$$

برای آزمون به صورت زیر عمل می‌کنیم. رد می‌کنیم H_0 را هرگاه:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\frac{\left(O_{ij}-\frac{O_{i\cdot}O_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{O_{i\cdot}O_{\cdot j}}{n}} > \chi^2_{[(r-1)(c-1)];\alpha}$$

مثال)

X \ Y	سرطان زا	سرطان زا نیست	جمع
سیگار کشیدن	۱۰٪	۰٪	۱
سیگار نکشیدن	۳٪	۹۷٪	۱

X \ Y	تورم زا	تورم زا نیست	جمع
حذف صفر از پول	۳۵٪	۶۵٪	۱
صفر از پول حذف نشود	۲۰٪	۸۰٪	۱

مسئله ۱۷ ص ۱۴۷

از ۲۰۰ نفر بطور تصادفی در شهر تهران ۲ سؤال زیر پرسیده شده است:

سؤال ۱: به نظر شما برای کاهش بار تورم بر کارمندان باید حقوق آنان افزایش یابد؟

سؤال ۲: آیا شما کارمند هستید؟

نتایج بدست آمده به صورت زیر است:

سؤال ۱	سؤال ۲: بله	خیر	جمع
بله	۵۰	۶۰	۱۱۰
خیر	۱۰	۸۰	۹۰
جمع	۶۰	۱۴۰	۲۰۰

آیا در سطح $\alpha = ۵\%$ پاسخ داده شده به سؤال ۱ مستقل از کارمند بودن یا نبودن شخص است؟

H_0: افزایش حقوق از کارمند بودن مستقل است

H_1: از هم مستقل نیستند

افزایش حقوق؟ — کارمند بودن

سؤال ۱ \ سؤال ۲	B_1 (بله)	B_2 (خیر)	جمع
A_1 (بله)	$50 = O_{11}$	$60 = O_{12}$	$110 = O_{1\cdot}$
A_2 (خیر)	$10 = O_{21}$	$80 = O_{22}$	$90 = O_{2\cdot}$
جمع	$60 = O_{\cdot 1}$	$140 = O_{\cdot 2}$	۲۰۰

رد می‌کنیم H_0 را هرگاه:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\left(50-\frac{110\times 60}{200}\right)^2}{\frac{110\times 60}{200}}+\frac{\left(60-\frac{110\times 140}{200}\right)^2}{\frac{110\times 140}{200}}+\frac{\left(10-\frac{90\times 60}{200}\right)^2}{\frac{90\times 60}{200}}+\frac{\left(80-\frac{90\times 140}{200}\right)^2}{\frac{90\times 140}{200}} > \chi^2_{(1);\%1}$$

$27/80 > 6/635$ پس H_0 رد می‌شود

تذکر) همانطور که ملاحظه شد محاسبه در آزمون‌های خی‌دو طولانی‌تر است. اما در آزمون استقلال

اگر جدول ۲×۲ باشد مانند مثال قبل برای خی‌دو محاسبات یا مقدار آماره پیرسون می‌توانید

به صورت زیر عمل کنید:

رد می‌کنیم H_0 را هرگاه:

$$\frac{n(O_{11}O_{22}-O_{12}O_{21})^2}{O_{10}\,O_{01}\,O_{20}\,O_{02}} > \chi^2_{(1),\alpha}$$

مسئله ۱۷

$$R\,H_0 \iff \frac{200(50\times 80-90\times 100)}{110\times 60\times 90\times 140} > \chi^2_{1,0.01}$$

$$27.80 > 6.635 \Rightarrow$$ پس H_0 رد شد

تحلیل واریانس:

آزمون برابری میانگین‌های بیش از ۲ جامعه:

در جلسات گذشته مطالبی را در خصوص آزمودن ادعاهای مطرح شده برای میانگین یک جامعه یا دو جامعه نرمال مستقل یا وابسته ارائه کردیم. اینک می‌خواهیم نحوه‌ی آزمودن همزمان برابری میانگین‌های بیش از ۲ جامعه نرمال مستقل را بیان کنیم.

فرض کنید:

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1} \xrightarrow{i.i.d} N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$\vdots$$

$$X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn_k} \xrightarrow{i.i.d} N(\mu_k, \sigma_k^2)$$

	۱	۲	 i	k	
	X_{11}	X_{21}	X_{i1}	X_{k1}	
	X_{12}	X_{22}	X_{i2}	X_{k2}	
	X_{1n_1}	X_{2n_2}	X_{in_i}	X_{kn_k}	
جمع	$X_{1\circ}$	$X_{2\circ}$	$\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = X_{i\circ}$	$X_{k\circ}$	$\to X_{\circ\circ}$
میانگین	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	(میانگین‌های ∘) $\bar{X}_{i\circ}=\circ$	$\bar{X}_k$	$\to \bar{\bar{X}}$

می‌خواهیم فرض H_0 را در مقابل H_1 بیازماییم:

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1: \text{حداقل یکی از تساوی‌های بالا برقرار نباشد} \quad \exists i \neq j \ni \mu_i \neq \mu_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \\ H_1: \exists i \ni \alpha_i \neq 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 0 \end{cases}$$

اگر H_0 رد نشود یعنی $\mu_1 = \mu_k$ دیگر نیازی به آزمودن μ نیست!

داده j ام از گروه i ام $\quad X_{ij} = \underbrace{\mu_i}_{\text{میانگین}} + \epsilon_{ij} = \mu + \underbrace{\alpha_i}_{\text{نوع تدریس استاد}} + \epsilon_{ij} \sim$ خطا

$i = 1, 2, \dots, k \qquad \alpha_i = \mu_i - \mu$ اثر تیمار i ام $\qquad \mu = \dfrac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k}{k}$ میانگین میانگین‌ها

چون تعداد نمرات در هر گروه متفاوت است پس μ کل نداریم لذا تخمین می‌زنیم. ($\bar{\bar{X}}$ تخمین زننده μ)

$\hat{\mu}_i = \bar{X}_i \quad , \quad \hat{\alpha} = \bar{X}_i - \bar{\bar{X}} \quad , \quad$ (تخمین اش) $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$ ~ پارامتر

$$X_{ij} = \mu_i + \alpha_i + \epsilon_{ij} \xrightarrow{\text{انحراف آن از کل نوشته}} (X_{ij} - \bar{\bar{X}}) = (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}) + (X_{ij} - \bar{X}_i)$$

انحراف مشاهده j ام از تیمار i ام از میانگین کل

انحراف ناشی از تیمار i ام (بین گروهی، استاد روش کار است)

انحراف ناشی از سایر عوامل (درون گروهی) هر چیز اثر گذار (روش کار استاد، مثل هوش ...)

طرفین را به توان ۲ رسانده و روی آن جمع می‌بندیم.

$$(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 = (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 + (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 = (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 + (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + 2(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\cancel{(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})}^{\,0}(X_{ij} - \bar{X}_i)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2}_{\substack{SS_T \\ \text{مجموع مربعات کل}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}_{\substack{SS_{tr} \\ \text{مجموع مربعات تیمار}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}_{\substack{SS_e \\ \text{مجموع مربعات خطا}}}$$

جدول تحلیل واریانس: (ANOVA)

منبع پراکندگی (S.V)	مجموع مربعات	درجه آزادی df	میانگین مربعات	کسر فیشر F
تیمار (دوا)	SS_{tr}	$k-1$	$MS_{tr}=\frac{SS_{tr}}{k-1}$	
خطا	SS_e	$N-k$	$MS_e=\frac{SS_e}{N-k}$	$F=\frac{MS_{tr}}{MS_e} > f_{(k-1)(N-k),\alpha}$
کل	SS_T	$N-1$	—	

نتیجه: رد H_0 یعنی حداقل یکی از میانگین ها با بقیه برابر نیست.

اگر بخواهد فرض H_0 رد شود شرط لازم این است که $F>1$ شود ولی کافی نیست. حال شرط کافی این است که چه مقدار بزرگتر از f شود؟ $(F>f)$

پس اگر میانگین گروه ها اختلاف بیشتری داشته باشند باعث می شود صورت بزرگتر شود.

(مقدار ثابت) $\overline{SS_T} = SS_{tr}\downarrow + SS_e\uparrow$

- اگر $F<1$ شود، H_0 به هیچ وجه رد نمی شود.

- بررسی اختلاف بین k میانگین: یک مثال — صفحه ۱۶۱

می خواهیم اثر سه نوع کود شیمیایی را بر روی میوه سیب تولیدی کشاورزان با یکدیگر مقایسه کنیم. برای این کار ۱۵ عدد سیب را بطور تصادفی انتخاب کرده ایم و وزن آن ها را مورد بررسی قرار داده ایم. نتیجه در جدول زیر آمده است.

نوع کود	وزن به گرم	میانگین	جمع
الف	۷۷-۸۱-۷۱-۷۶-۸۰	$\bar{x}_1=77$	$X_{1.}=385$
ب	۷۲-۵۸-۷۴-۶۶-۷۰	$\bar{x}_2=68$	$X_{2.}=340$
ج	۷۶-۸۵-۸۲-۸۰-۷۷	$\bar{x}_3=80$	$X_{3.}=400$

$k=3 \quad n=15$

$\bar{\bar{x}}=\sum\frac{\bar{x}_i}{3}=75$

$\bar{\bar{x}}=\frac{X_{..}}{15}=75$

۳. آیا اختلاف معناداری بین میانگین‌ها وجود دارد؟

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1: \text{تمام میانگین‌ها با هم مساوی نیستند} \end{cases}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij})^2 - \frac{(X_{oo})^2}{N}$$

$$SS_{tr} = \sum\sum (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(X_{io})^2}{n_i} - \frac{(X_{oo})^2}{N}$$

$$SS_{tr} = ۵(۷۷-۷۵)^۲ + ۵(۶۸-۷۵)^۲ + ۵(۸۰-۷۵)^۲ = ۳۹۰$$

$$SS_e = SS_T - SS_{tr} = ۶۶۶ - ۳۹۰ = ۲۷۶$$

	SS	df	MS
تیمار	۳۹۰	۲	۱۹۵
خطا	۲۷۶	۱۲	۲۳
کل	۶۶۶	۱۴	

$$F: \frac{MS_{tr}}{MS_e} > f_{(k-1),(N-k),\alpha}$$

$$۸٫۴۸ > f_{(۲,۱۲)(۰٫۰۵)}$$

$$۸٫۴۸ > ۳٫۸۳$$

H_0 رد می‌شود یعنی حداقل عملکرد یکی از کودها با بقیه فرق می‌کند شاید هم همه با هم فرق می‌کنند. پس لازم است بررسی کنیم کدام زوج گروه‌ها با هم اختلاف دارند. به عبارت دیگر حتی اگر جدول تحلیل واریانس منجر به رد فرض H_0 شود باز روش‌ها یا آزمون‌های مقایسه دو به دوی تیمارها وجود دارد که به آنها «روش‌های تعقیبی» یا «پس آزمون» می‌گویند. مانند LSD، توکی، دانکن، شفه، دانت و ...

در روش LSD میانگین‌های نمونه را دو به دو از هم کم می‌کنیم. در این مسئله خاص فرمول این است:

$$LSD: t_{(k-1),\alpha}\sqrt{MS_e\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = t_{(۲),(۰٫۰۵)}\sqrt{۲۳ \times ۲/۵} = ۸٫۸۵$$

$$\begin{cases} X_۳ - X_۱ = ۸۰ - ۷۷ = ۳ \\ X_۳ - X_۲ = ۸۰ - ۶۸ = ۱۲^* > ۸٫۸۵ \\ X_۱ - X_۲ = ۷۷ - ۶۸ = ۹^* > ۸٫۸۵ \end{cases} \Rightarrow$$

این ۲ نوع کود در سطح $\alpha = ۰٫۰۵$ اختلاف دارند.

نکته، اگر در کنار روی F [F (محاسبه شده)] در تفاضل میانگین ها ۲ تا ستاره (F^{**}) گذاشته باشند به این

معناست که مثلا در سطح $\alpha = 0.01$ اختلاف معنادار است $\alpha = 0.01 \quad > LSD = 24.11$

ولی اگر تک علامت ستاره گذاشته باشند (F^{*}) یعنی اینکه اختلاف دارند اما معنادار نیست.

توجه ۱ : واریانس : $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N} = \sum (\frac{x_i}{N})^2 - \sum \frac{(\bar{x})^2}{N}$

توجه ۲ : $\sum_{j=1}^{n_i} a_i$ چون j ندارد پس عدد ثابت حساب می‌شود $= n_i \times a_i$

توجه ۳ : $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_i - \bar{\bar{x}})(x_{ij} - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}) \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)$

نکته مهم، در انجام تحلیل واریانس جهت آزمون برابری k تا میانگین، برقراری فروض زیر الزامی است،

۱) گروه هایی که از آنها نمونه انتخاب می‌کنیم باید نرمال باشند

۲) باید از هم مستقل باشند

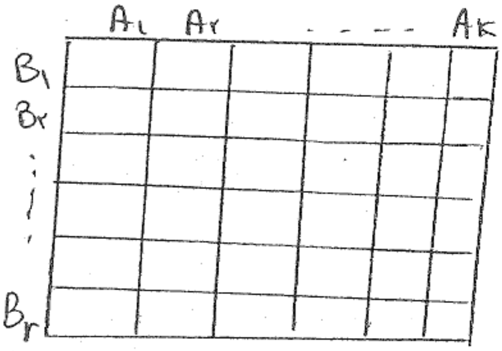
۳) واریانس ها باید باهم برابر باشند، مثلاً اگر واریانس ها برابر نباشند باید از یک روش آماری دیگری استفاده کنیم.

یا اینکه تبدیلی روی داده ها انجام می دهند (توان ۲، عکس، جذر، ...) تا واریانس ها برابر گردد.

اگر شرط ۱ یعنی نرمال بودن برقرار نباشد از روش های «ناپارامتری» استفاده می کنیم.

- طرح بلوک کامل تصادفی B :

در تحلیل واریانس یکطرفه یک تیمار داشتیم می خواستیم میانگین سطوح مختلف آنرا مقایسه کنیم. گاهی اوقات ۲ عامل مطرح می شود (۲ تیمار). اگر A در k تا سطح و B در r تا سطح باشد در اینصورت در تحلیل واریانس دو طرفه ی



۲ عامل rk یا r×k ترکیب تیمار داریم:

$(A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_kB_r)$

مثال

۲ : تعداد فرض   k : تعداد شرکت

حال اگر برای هر ترکیب تیماری n آزمودنی داشته باشیم، پس از اندازه گیری ها می توانیم با استفاده از مدل زیر علاوه بر مقایسه سطوح عامل A و سطوح عامل B، اثر متقابل آنها را نیز بیازماییم.

در کتاب به زبان ساده تر بیان شده که یک طرف تیمار یا عامل A است و طرف دیگر عامل B می باشد. حال اگر k سطح عامل A را تصادفاً در n تا بلوک به قسمی توزیع کنیم که در هر بلوک هر یک از تیمارها یکبار ظاهر شود مدلی به شکل زیر بدست می آید:

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \qquad i = 1, 2, \dots, k \qquad j = 1, 2, \dots, r$$

X_{ij} : i ها تیمار، j بلوک — مشاهده تیمار i اُم در بلوک j اُم

$$\begin{cases} H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k \\ H_1: \exists i \ni \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

حداقل یکی برابر صفر نیست

$$\begin{cases} H_0': \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0 \\ H_1': \exists j \ni \beta_j \neq 0 \end{cases}$$

	A_1	A_2	...	A_k	جمع مشاهدات بلوک	میانگین مشاهدات
B_1	X_{11}	X_{21}		X_{k1}	X_{o1}	$\overline{X}_{o1}$
B_2	X_{12}	X_{22}		X_{k2}	X_{o2}	$\overline{X}_{o2}$
...						
B_n	X_{1n}	X_{2n}		X_{kn}	X_{on}	$\overline{X}_{on}$
جمع	X_{1o}	X_{2o}		X_{ko}	X_{oo}	
میانگین	$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$		$\overline{X}_k$		$\overline{X}_{oo}$

انحراف مشاهده تیمار iام در بلوک jام (X_{ij}) از میانگین کل به صورت زیر تجزیه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{oo})^2=\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}_{io}-\overline{\overline{X}}_{oo})^2}_{\text{انحراف ناشی از تیمار}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{X}_{oj}-\overline{\overline{X}}_{oo})^2}_{\text{انحراف ناشی از بلوک}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{io}-\overline{X}_{oj}+\overline{\overline{X}}_{oo})^2}_{\text{انحراف ناشی از خطای باقی مانده (اثر متقابل)}}$$

$$SS_T = SS_{tr} + SS_b + SS_e$$

$$df:\quad (nk-1) = (k-1) + (n-1) + (n-1)(k-1)$$

منبع پراکندگی SV	مجموع مربعات SS	درجه آزادی df	میانگین مربعات MS	کسر فیشر F
تیمار	SS_{tr}	$k-1$	$MS_{tr}=\frac{SS_{tr}}{k-1}$	$F_{tr}=\frac{MS_{tr}}{MS_e} > f_{(k-1),(n-1)(k-1),\alpha}$
بلوک	SS_b	$n-1$	$MS_b=\frac{SS_b}{n-1}$	$F_b=\frac{MS_b}{MS_e} > f_{(n-1),(n-1)(k-1),\alpha}$
خطا	SS_e	$(n-1)(k-1)$	$MS_e=\frac{SS_e}{(n-1)(k-1)}$	
کل	SS_T	$(nk-1)$		

$F_{tr} > f_{(k-1),(n-1)(k-1),\alpha}$ ⇐ H_0 رد ⇐ حداقل یکی از تیمارها اختلاف دارند

$F_b > f_{(n-1),(n-1)(k-1),\alpha}$ ⇐ H_0' رد ⇐ حداقل یکی از بلوک‌ها با بقیه فرق کرده

مثال صفحه ۱۷۱ :

امتحانی در خصوص درس اقتصاد از نمره‌های اقتصاد مرکب از ۳ دانشجوی سال دوم در چهار دانشکده مختلف امتحان انجام شده است و نتایج در جدول زیر ثبت شده است:

بلوک	تیمار (نمرات دانشجویان)	تیمار	تیمار	میانگین
الف	۸۷	۷۰	۹۲	۸۳
ب	۵۶	۷۵	۴۴	۵۸
ج	۵۰	۶۶	۷۰	۶۲
د	۷۹	۸۵	۶۷	۷۷

پاسخ: از آنجائیکه اختلاف میان میانگین‌ها بسیار زیاد است می‌توان نتیجه گرفت که اختلاف واقعی بین این ۴ دانشکده وجود دارد. اما انجام ۲ آنالیز یکطرفه این مسئله را به اثبات نمی‌رساند. اکنون ۲ آنالیز واریانس دوطرفه را تشکیل می‌دهیم:

$N=12 \quad K=4$

SV	df	SS	MS	کسر فیشر F
تیمار	۳	۱۲۷۸	$\frac{1278}{3}=426$	$F_{tr}=\frac{426}{147} > f_{3,8,0.05}$
خطا	۸	۱۱۷۶	$\frac{1176}{8}=147$	$2.9 \not> 4.07$
کل	۱۱	۲۴۵۴		

H_0 در سطح معنادار $\alpha=0.05$ رد نمی‌شود. بین نه تنها اختلاف زیادی بین ۴ میانگین وجود دارد بلکه اختلاف زیادی نیز بین مشاهدات در داخل نمونه نیز وجود دارد.

در اولین نمونه مشاهدات بین ۷۰ تا ۹۲ است در دومین بین ۴۴ تا ۸۵ و سومین ۵۰ تا ۷۰ در چهارمین ۶۷ تا ۸۵ می‌باشد. باید اختلاف مشاهده شده در داخل نمونه‌ها را به دلیل اختلاف بین استعداد دانشجویان بدانیم. بنابراین SV دیگری در رابطه با استعداد دانشجویان به میزان «خطای آزمایش تجربی» اضافه شده است. این خطا، میزان مجموع مربعات خطا که در مخرج F_{tr} قرار دارد را افزایش داده و موجب کاهش F_{tr} می‌گردد و در نتیجه باعث می‌شود H_0 رد نشود. برای اجتناب از چنین مواردی باید آنالیز واریانس دوطرفه را انجام دهیم که یک بار استعداد دیگری

به نام اثر عامل دوم (استعداد) اضافه می‌شود. اکنون فرض کنید که از هر دانشکده هر دانشجو را از میان کم استعداد و استعداد متوسط و با استعداد انتخاب می‌کنند.

	بلوک: کم استعداد	استعداد متوسط	با استعداد	جمع
تیمار: الف	۷۱	۹۲	۸۹	$T_{1\circ}=252$
ب	۴۴	۵۱	۸۵	$T_{2\circ}=180$
ج	۵۰	۶۴	۷۲	$T_{3\circ}=186$
د	۶۷	۸۱	۸۶	$T_{4\circ}=234$
جمع	$T_{\circ 1}=232$	$T_{\circ 2}=288$	$T_{\circ 3}=332$	$X_{\circ\circ}=852$

$k=4$ (دانشکده) $\quad n=3$ (دانشجو)

$$SS_T=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{\bar{x}}_{\circ})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij})^2-\frac{(X_{\circ\circ})^2}{nk}$$

$$=\underbrace{(71)^2+\cdots\cdots+(86)^2}_{\text{۱۲ تا}}-\frac{(852)^2}{12}=2922$$

$$SS_{tr}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{X}_{i\circ}-\bar{X}_{\circ\circ})^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(X_{i\circ})^2}{n}-\frac{(X_{\circ\circ})^2}{nk}$$

$$=\frac{1}{3}\left[(252)^2+(180)^2+(186)^2+(234)^2\right]-\frac{[852]^2}{12}=1260$$

$$SS_b=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\bar{X}_{\circ j}-\bar{\bar{X}}_{\circ\circ})^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{(X_{\circ j})^2}{k}-\frac{(X_{\circ\circ})^2}{nk}$$

$$=\frac{(232)^2}{4}+\frac{(288)^2}{4}+\frac{(332)^2}{4}-\frac{(852)^2}{12}=1256$$

SV	SS	df	MS	F کسر
تیمار	۱۲۶۰	۳	$\frac{1260}{3}=420$	$F_{tr}=\frac{420}{67.67}=6.21>f_{(3,6),0.05}\Rightarrow 6.21>4.76$
بلوک	۱۲۵۶	۲	$\frac{1256}{2}=628$	
خطا	۴۰۶	۶	$\frac{406}{6}=67.67$	$F_b=\frac{628}{67.67}>f_{(2,6),0.05}\Rightarrow 9.28>5.14$
کل	۲۹۲۲	۱۱		

پس H_0 رد می‌شود یعنی بین استعداد دانشجویان اختلاف وجود دارد.

H_0 رد می‌شود یعنی بین نوع دانشکده‌ها هم اختلاف وجود دارد.