

۳ انواع تجزیه های ماتریس

$$A = LU$$

تجزیه دولیتل

تجزیه کرات

تجزیه چولسلی

در تجزیه دولیتل $A = LU$ ، U را به صورت حاصلضرب دو ماتریس

L پائین مثلثی و U بالا مثلثی که روی قطره اصلی L ، ۱ است

تجزیه کرات $A = LU$ روی قطره اصلی U ، ۱ است

تجزیه چولسلی $A = LL^T$

Note: همه ماتریس ها تجزیه چولسلی ندارند

ماتریسی تجزیه چولسلی دارد که:

① A متقارن باشد $A = A^T$

② درایه های روی قطره اصلی A همه مثبت باشد

③ درمیان زیر ماتریس های درجهت قطره اصلی مثبت باشد

$$A = \begin{bmatrix} 1 \times 1 & & \\ & 2 \times 2 & \\ & & 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

آغاز نوروز (تعطیل) - شب قدر

هر اقدام بزرگ ابتدا محال به نظر می رسد. توماس کارلایل

تجزیه دو لایه: $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{r1} & 1 & 0 \\ L_{c1} & L_{c2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$

تجزیه درایه: $A = LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

تجزیه چولایه: $A = LL^T = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & L_{22} & L_{23} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix}$

Note: برای حل دستگاه $AX = b$ از تجزیه حاصل استفاده کنیم
در این صورت $A = LU$
 $LUX = b$

در $UX = Y$ کتبا $LY = b$ داخل برده و Y به دست می آید

مسی در $4x=y$ ذائقه و به دار x (مجهول) را به دست می آوریم

Ex دستگاه $Ax=b$ با تجزیه دولتی به دست آورید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{r1} & 1 & 0 \\ L_{c1} & L_{c2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

۱۲:۰۰

تعداد اول $\left\{ \begin{array}{l} u_{1,1} = 1 \\ u_{1,2} = 1 \\ u_{1,3} = 2 \end{array} \right.$

تعداد ها $\left\{ \begin{array}{l} u_{2,1} = 1 \\ u_{2,2} = 1 \\ u_{2,3} = 2 \end{array} \right.$

L سطر سوم $\left\{ \begin{array}{l} L_{r1} u_{11} = 2 \rightarrow L_{r1} = 2 \\ L_{r1} u_{1r} + u_{rr} = 3 \rightarrow u_{rr} = 1 \\ L_{r1} u_{1r} + u_{rr} = 1 \rightarrow u_{rr} = -3 \end{array} \right.$

$$L \begin{cases} L_{p1} u_{11} = 3 \rightarrow L_{p1} = 3 \\ L_{p1} u_{1r} + L_{p2} u_{2r} = -1 \rightarrow L_{p2} = -4 \\ L_{p1} u_{1r} + L_{p2} u_{2r} + u_{cc} = -1 \rightarrow u_{cc} = -19 \end{cases}$$

عید نوروز (تعطیل) - شب قدر

برای ازدواج کردن بیش از جنگ رفتن شجاعت لازم است . کریستین

2025

24

March

1446

رمضان

۲۳

$$[y = b]$$

دوشنبه

۴

فروردین ماه

۱۴۰۴

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 3 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \rightarrow y_2 = -4 \\ 3y_1 - 4y_2 + y_3 = 4 \rightarrow y_3 = -19 \end{cases}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -19 \end{bmatrix}$$

$$UX = Y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - 3x_3 = -4 \\ -19x_3 = -19 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



سه شنبه

25 March 2025
۲۴ ۱۴۴۶
رمضان

۱۴۰۴

فروردین ماه

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ex: تجزیه چولسکی ماتریس

حل

ماتریس A متوازن است و درایه‌های روی قطر اصلی مثبت است

$$\det[3] = 3 > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\det[A] = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3(8 - 1) - 4 = 17 > 0$$

$$A = L L^T = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

چون هر ضلع روی قطر اصلی مثبت باشد، اگر مثبت در نظر می‌گیریم

$$L_{11}^2 = 3 \rightarrow L_{11} = \sqrt{3}$$

$$L_{11} L_{21} = 1 \rightarrow L_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$L_{11} L_{31} = 0 \rightarrow L_{31} = 0$$

$$L_{21} L_{22} = 1 \rightarrow L_{22} = \frac{1}{L_{21}} = \sqrt{3}$$

$$L_{21}^2 + L_{22}^2 = 2 \rightarrow L_{22}^2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \rightarrow L_{22} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$L_{31} L_{32} + L_{22} L_{32} = -1 \rightarrow L_{32} = \frac{-1}{L_{22}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 = 4 \rightarrow L_{33}^2 = 4 - \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = \frac{14}{5} \rightarrow L_{33} = \sqrt{\frac{14}{5}}$$

$$L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 = 4 \rightarrow L_{33} = \sqrt{\frac{14}{5}}$$

مسئولیت دوش به دوش قدرت و لیاقت [ظرفیت] حرکت می‌کند. جوسیا گیلبرت هولاند

$$AX = b$$

روش های تکراری برای حل دستگاه

روش ژاکوبی J

روش گارسیل GS

در این روش ها از یک نقطه شروع می شود و آن را بصورتی به دست می آوریم

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \epsilon$$

خطای قبل $\epsilon = 10^{-3}$
 جواب تکرار k ام
 جواب تکرار $k+1$

Note: سرعت همگرايي روش GS بيشتر از J است پس روش GS بهتر از J است

$$AX = b$$

روش ژاکوبی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (a_{ii} \neq 0)$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

زادروز زرتشت پیامبر

مسئولیت قبول کن، بگذار هر چه می خواهی پیش بیاورد. آنتون...



فروردین ماه ۱۴۰۴

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} x_1^{(k)} - a_{32} x_2^{(k)})$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)})$$

روش GS

Note در روش های J, GS ماتریس ضرایب A باید غالب قطری سه‌سری (سه‌سری)

۱۲:۰۰

باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

روز هنرهای نمایشی

Note (ماتریس غالب قطری سه‌سری)



جمعه

فروردین ماه ۱۴۰۴

سطر اول $|5| > |3| + |-1| = 4 \checkmark$
 سطر دوم $|8| > |-2| + |1| = 3 \checkmark$
 سطر سوم $|-9| > |2| + |0| = 2 \checkmark$

28 March 2025
۲۷ رمضان ۱۴۴۶

ماتریس A غالب قطری سه‌سری و سه‌سری آید است

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

Note ماتریس غالب قطری سه‌سری

ستون اول $|5| > |-2| + |2| = 4 \checkmark$

ستون دوم $|8| > |3| + |0| = 3 \checkmark$

ستون سوم $|-9| > |1| + |-1| = 2 \checkmark$

روز جهانی قدس (آخرین جمعه ماه رمضان)

می‌اندیشم پس هستم، هستم چون فکر می‌کنم، و فکر می‌کنم چون شک می‌کنم، رنه دکارت

ماتریس غایب قطری مستونی و مستونی اکید اس

۰۸:۰۰

Def: $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| > |a_{ii}|$ ماتریس غایب قطری مستونی اکید

۰۹:۰۰

$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \geq |a_{ii}|$ ماتریس غایب قطری مستونی

۱۰:۰۰

$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| > |a_{ii}|$ ماتریس غایب قطری مستونی اکید

۱۱:۰۰

$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \geq |a_{ii}|$ ماتریس غایب قطری مستونی

۱۲:۰۰

Note در صورتی که ماتریس A در دستگاه $AX=b$ غایب قطری مستونی

یا مستونی نباشد باید با احتمال مستونی مقداری، ماتریس A را به

۱۳:۰۰

غایب قطری مستونی (مستونی) تبدیل کنیم می خواهیم ۱ کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{r_1}{3} \rightarrow r_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۵:۰۰

$$-r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \frac{r_2}{-\frac{2}{3}} \rightarrow r_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۶:۰۰



۱۷:۰۰

Ex: دسته زیر را به روش گausse حل کنید

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 = 18 \end{cases}$$

(با جردن اولی)

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -10 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

سطر اول $17.1 > 11+1-1=21$ ✓
 سطر دوم $13.1 > 11+1-1=21$ ✓
 سطر سوم $18.1 > 11+1-1=21$ ✓

پس A غالب قطری است پس روش ج گاوس را این

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{20} (17 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{10} (13 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10} (18 + x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{cases}$$

مرحله اول

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{20} (17 - 0 + 0) = 0.85 \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{10} (13 - 0 - 0) = -1.3 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{10} (18 + 0 - 0) = 1.8 \end{cases}$$

مرحله دوم

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{20} (17 - (-1.3) + 1.8) = 1.05 \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{10} (13 - 0.85 - 1.8) = -1.035 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{10} (18 + 0.85 - (-1.3)) = 2.015 \end{cases}$$

	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
۳	۱,۱۰۲۵	-۰,۹۹۸	۲,۰۰۴
۴	۱,۰۰۱	-۰,۹۹۹۵	۲,۰۰۰۰۵
۵	۰,۹۹۹۹۷	-۰,۹۹۹۹۸	۱,۹۹۹۹۴
۶	۱	-۱,۰۰۰۰۱	۲



مُربط بوقت و $|x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}| < \epsilon$ و $|x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}| < \epsilon$

که ϵ خلاقیات قبل $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

EX: دسته زیر را به روش Gauss حل کنید

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - 10x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 = 18 \end{cases}$$

(ب) با حدس اولیه

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} (17 - x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{10} (13 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10} (18 + x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

مرحله اول

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{2} (17 - 0 + 0) = 8.5 \\ x_2^1 = -\frac{1}{10} (13 - 8.5 - 0) = -0.45 \\ x_3^1 = \frac{1}{10} (18 + 8.5 - (-0.45)) = 2.045 \end{cases}$$

عید سعید فطر (تعطیل)

انسان آن چیزی خواهد شد که خود باور دارد اودنه ساندرو

مرحله دوم

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2.0} (17 - (-1.215)) + (2.0042) = 1.01108 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2.0} (13 - 1.01108 - 2.0042) = -0.99824 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{1.0} (18 + 1.01108 - (-0.99824)) = 2.0093 \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
۳	-۰.۹۹۹۹۹	-۰.۹۹۹۹۹	۱.۹۹۹۹۹
۴	-۰.۹۹۹۹۹	-۱	۲

$$x_1 \rightarrow 1$$

$$x_2 \rightarrow -1$$

$$x_3 \rightarrow 2$$

Note: سطر فوق روش GS مناسب است

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^0 = 0 \\ y^0 = 0 \end{cases}$$

Ex: به روش GS ؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{قاب قطری سطری نیست}$$

حل از مرحله ۳ به جا برون

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{قاب قطری سطری نیست}$$

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \frac{1}{2} (3 - y^{(k)}) \\ y^{(k+1)} = -\frac{1}{2} (4 - x^{(k+1)}) \end{cases} \quad \text{مرحله اول}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} (3 - 0) = 1.5 \\ y' = -\frac{1}{2} (4 - 1.5) \end{cases}$$



تعطیل به مناسبت عید سعید فطر و روز جمهوری اسلامی ایران (تعطیل)

هرچیزی که بیرون از محدوده آبرو باشد جز شکست و تباهی نتیجه ای نخواهد داشت! سامر سومروم

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس

فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد

$\det(A - \lambda I_{n \times n}) = 0$ چند جمله ای مشخصه زیر را تشکیل می دهد

ریشه های چند جمله ای مشخصه بالا، مقادیر ویژه ماتریس A است. (λ)

و $x_{n \times 1}$ بردار، بردار ویژه نظیر مقدار ویژه λ هیند هر λ

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad \text{یا} \quad Ax = \lambda x$$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه آن ؟

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(4-\lambda) - 0 = 0 \quad \lambda = 3 \quad \lambda = 4$$

if $\lambda = 3 \rightarrow Ax = \lambda x = 3x$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 3x_1 \rightarrow x_2 = 0 \\ 4x_2 = 3x_2 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{free} \quad x_1 = 1 \quad \text{اگر } x_1 = 1$$

روز طبیعت (تعطیل)

$$\text{if } \lambda = 4 \rightarrow Ax = \lambda x = 4x$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4x_1 & \rightarrow -x_2 = x_1 & \text{از } x_1 = 1 \text{ بزرگ} \\ 4x_2 = 4x_2 & & x_2 = -1 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

بررسی



Note اگر $A_{n \times n}$ باشد حتماً دارای n مقدار حقیقی می باشد (مقادیر ویژه)
 می تواند عدد مختلط $\lambda = a + ib$ نیز باشد که به بررسی حقیقی و
 b حقیقت مفروضی

Note: اگر A بالا مثلثی (درایه های زیر قطر اصلی صفر باشد) $(A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$

یا پایین مثلثی (درایه های بالا قطر اصلی صفر باشد) $(A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$

یا قطری (درایه های بالا و پایین قطر اصلی صفر باشد) $(A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$

اگر به مقادیر ویژه همان درایه های روی قطر اصلی A است

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ex: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را

حل:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (2-\lambda) [(1-\lambda)(-3-\lambda) - 2] - 2 [2(-3-\lambda) + 1]$$

$$-3-\lambda + \frac{1}{2}\lambda + 2 - 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 2 \quad \downarrow \quad -4 - 2\lambda + 2 = -2\lambda - 2$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 2) - 2(2\lambda + 1) = 0$$

$$= 2\lambda^2 + 4\lambda - 10 - \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda - 2 = -\lambda^3 + 13\lambda - 12 = 0$$

پیدا کردن ریشه معادله درجه ۳ (از روش امتحان کردن)

$$\text{if } \lambda = 1 \rightarrow -1 + 13 - 12 = 0 \quad \checkmark$$

چون $\lambda = 1$ ریشه است پس به ریشه $(\lambda - 1)$ تقسیم کرد

$$\begin{array}{r}
 -\lambda^3 + 13\lambda - 12 \quad | \lambda - 1 \\
 \hline
 -(-\lambda^3 + \lambda^2) \\
 \hline
 -\lambda^2 + 13\lambda - 12 \\
 -(-\lambda^2 + \lambda) \\
 \hline
 12\lambda - 12 \\
 - (12\lambda - 12) \\
 \hline
 0 \quad 0
 \end{array}$$

$$-\lambda^2 - \lambda + 12 = -(\lambda^2 + \lambda - 12) = -(\lambda + 4)(\lambda - 3)$$

$$\lambda = -4 \quad \lambda = +3$$

به دست آوردن بردارهای ویژه مثال ۳

$$\text{if } \lambda = 1 \quad Ax = \lambda x = x$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = x_1 & \textcircled{1} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = x_2 & \textcircled{2} \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = x_3 & \textcircled{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 & \textcircled{1} \\ x_1 + x_3 = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_1$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = x_2 & \textcircled{2} \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = x_3 & \textcircled{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 & \textcircled{2} \\ x_3 = -2x_1 & \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 & \textcircled{3} \\ -5x_1 + 2x_2 - 4(2x_1) = 0 & \textcircled{5} \\ x_1 + 2x_2 = 0 & \textcircled{1} \end{cases} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}x_1 \quad \textcircled{5}$$

۱، ۲، ۳ می‌ندازیم

هر چه بیشتر برابر حافظه بیفزائید حافظه تان قویتر میگردد و هرچه بیشتر بآن اعتماد کنید قابل اعتمادتر میگردد. توماس دوکوئین

$x_1 = 1$ آزاد

بنابر ① $x_1 = -2$

بنابر ② $x_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \lambda x = 3x$$

معادله بردار ویژه $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 3x_1 \rightarrow 2x_2 = x_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1 \rightarrow x_2 - x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

معادله ۳ مجهول بین x_1 آزاد $x_2 = \frac{1}{2}$ و x_3 است

$$2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = -1 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \lambda x = -4x$$

برای $\lambda = -4$



حسن روال ارازم می باشد

الدرتبع روش توانی (برای محاسبه بزرگترین مقدار و نیز یک حالت پس از

حیت قدر مطلق)

$$A_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{a_1} \end{bmatrix}$$

ω_1 μ_1

$$A \mu_1 = \begin{bmatrix} a_r \\ b_r \end{bmatrix} = a_r \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_r}{a_r} \end{bmatrix}$$

ω_r μ_r

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس 2×3

۸. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ بزرگترین مقدار و نیز از حیت قدر مطلق برای ماتریس

حل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1=5 \\ 2+5=7 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 5/7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ω_1 μ_1

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} + 1 = \frac{11}{7} \\ \frac{1}{7} + 5 = \frac{36}{7} \end{bmatrix} = \frac{36}{7} \begin{bmatrix} \frac{11}{36} \\ 1 \end{bmatrix}$$

ω_r μ_r

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{7} \\ \frac{31}{7} \end{bmatrix}$$

$$\omega_{10} = 4100147$$

$$\omega_{11} = 4100073 \rightarrow 4$$

$$\mu_{10} = \begin{bmatrix} 0/500344 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{11} = \begin{bmatrix} 0/500184 \\ 1 \end{bmatrix}$$

شرایط توقف: $|\omega_{11} - \omega_{10}| < \epsilon$

به گونه ای از عشق و شور خود مراقبت و پاسداری کنید که گویی گرانبها ترین دارایی شماست. باربارا دی آنجلیس



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ex: بزرگترین مقدار رینج ماتریس زیر

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{4}{4} \end{bmatrix}$$

w_1 μ_1

$$A \mu_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{4}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{4} \\ -\frac{12}{4} \\ -\frac{12}{4} \end{bmatrix} = \frac{21}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{12}{21} \\ -\frac{12}{21} \end{bmatrix}$$

w_2 μ_2

$$w_2 = 5,125 \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2381 \\ -0,2381 \end{bmatrix}$$

$$w_{10} = 5,994 \quad w_{11} = 5,994 \rightarrow 4$$

$$\mu_{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4919 \\ -0,4971 \end{bmatrix} \quad \mu_{11} = \begin{bmatrix} -0,9919 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

روز فرهنگ پهلوانی و ورزش زورخانه ای

اگر سخن چون نقره است ، خاموشی چون زر پر بها است. لقمان حکیم

بررسی ماتریس معکوس

روش راندی:

در این روش یک ماتریس معکوس را به قطری تبدیل می کنند

a_{pq} : بزرگترین در این بالای قطر اصلی

$$\theta = \begin{cases} \text{sign}(a_{pq}) \frac{\pi}{2} & a_{pp} = a_{qq} \\ \frac{1}{2} \arctan \frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}} & a_{pp} \neq a_{qq} \end{cases} \quad (p < q)$$

$$\text{sign}(a_{pq}) = \begin{cases} 1 & a_{pq} > 0 \\ -1 & a_{pq} < 0 \\ 0 & a_{pq} = 0 \end{cases}$$

۲۹ جمعه
فروردین ماه
۱۴۰۴

ماتریس دوران

$$E = \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{bmatrix}$$

سطر p
ستون q

$$A_1 \leftarrow E^T A E$$

stop

روز ارتش جمهوری اسلامی و نیروی زمینی

مرد پرهیزکار، هرگز پارسایی خود را نمی سنجد. پاسکال

◎人◎◎

$$p=1 \quad q=2$$

$$a_{99} = a_{rr} = 1$$

09:00

10:00

12:00

1100

1500

1200

مقادیر ویژه درایه های روی قطعه اصلی A_1 است

1430

اکستن ستن های E ، $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ به دارویی فیلد $\lambda = 0$ و $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ به دارویی $\lambda = 2$ تبدیل $\lambda = 1$ است

E_x مت دیر رویه و به دارهای رویه فانتسین متان زیر، امعاب کنید

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad a_{11} = -2 \quad p=1 \quad q=3$$

$$a_{pp} = a_{11} = -1 \quad a_{qq} = a_{33} = -2 \Rightarrow a_{pp} \neq a_{qq}$$

$$\theta = \frac{1}{r} \arctg \left(\frac{-2 a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}} \right) = \frac{1}{r} \arctg \left(\frac{-2(-2)}{-1 - (-2)} \right) =$$

$$\frac{1}{r} \arctg \left(\frac{4}{1} \right) \quad \sin \theta = .415 \quad \cos \theta = .781$$

$$E = \begin{bmatrix} \cos & 0 & \sin \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin & 0 & \cos \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 = p \text{ سطر} \\ \text{ستون } p \\ \text{ستون } q \\ 3 = q \text{ سطر} \end{matrix} = \begin{bmatrix} .781 & 0 & .415 \\ 0 & 1 & 0 \\ -.415 & 0 & .781 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = E^T A E = \begin{bmatrix} .781 & 0 & -.415 \\ 0 & 1 & 0 \\ .415 & 0 & .781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .781 & 0 & .415 \\ 0 & 1 & 0 \\ -.415 & 0 & .781 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.944 & -0.10 & -0.243 \\ -0.10 & -2.284 & -0.193 \\ -0.243 & -0.193 & -3.242 \end{bmatrix}$$

درستی نزدیک به است

الفن چون A_1 قطری شده است باید $a_{pq} = 0$ را انتخاب و اندرشت

نگار می شود و تا زمانی که A_4 قطری شود

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0/0.1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0.1/0.1 & -0.1 & -4 \end{bmatrix}$$

فراگین صفر به A_4 قطری است

پس $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = -2$ و $\lambda_3 = -4$

پس چون ۴ مرحله اندرشت نگار شده $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ ضرب کرده و

مستقیم های ماتریس حاصل، بردارهای ویژه نظیر λ_1 هستند

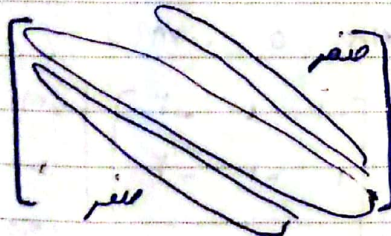
$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



روش گدینه



تبدیل یک ماتریس متقارن به ۳ قطری

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

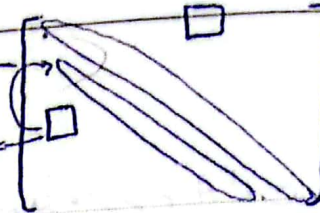
نموده ای از ماتریس ۳ قطری

مثال

۲

۱۴۰۴

عنصر بالایی سله P شنبه
عنصر بالایی سله وادیبهشت ماه



22 April 2025
ش ۲۳ 1446

اندازه یونیفرم

در این حالت فرض

من لیم من خالص عنصر بالایی را توسط عنصر بالایی من لیم

$$\tan \theta = \frac{\text{عنصر بالایی}}{\text{عنصر بالایی}} \rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{\text{عنصر بالایی}}{\text{عنصر بالایی}} \right)$$

نسبت $\sin \theta$, $\cos \theta$, رابطه است که در دو حالت در E را می سازیم

$$A_1 = E^T A E \quad E = \begin{bmatrix} \cos & \sin \\ \sin & \cos \end{bmatrix}$$

اگر A به قطری شود که اندریم stop در غیر این صورت یک مرحله دیگر تکرار می شود

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{عنصر بالایی}}{\text{عنصر بالایی}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad A_1 = E^T A E$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

تأسیس سپاه پاسداران انقلاب اسلامی (۱۳۵۸ ه.ش) - سالروز اعلام انقلاب فرهنگی (۱۳۵۹ ه.ش)

من اشخاص زنده را آنانی می دانم که مبارزه می کنند، بی مبارزه زندگی مرگ است. هوگو

A_1 سه قطری است که A_1 متشابه به ماتریس A است

Note: اگر A_1 با A متشابه باشند خصوصیات ماتریس A_1 با A یکسان است

(مثلاً مقدار ویژه و بردارهای ویژه و ...)

Note حاصلضرب ماتریس A $\lambda_i = A$ $\det A = \prod$

$\text{trace}(A) = \sum \lambda_i$ مجموع مقدار ویژه A

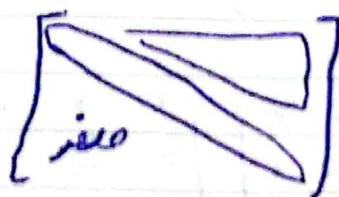
Note: اگر λ مقدار ویژه A باشد $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه A^{-1} است

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Note: اگر یک سطر (ستون) از ماتریس A را در λ ضرب کنیم در تعیین ماتریس جدید

λ برابر در تعیین ماتریس اول است

روش هاورس هولدر برای تبدیل ماتریس متقارن به I قطری



Note: ماتریس بالافلس

۴

پنجشنبه

۱۴۰۴

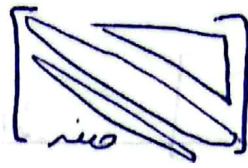
اردیبهشت ماه

24

April 2025

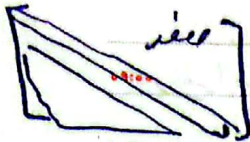
شوال

۲۵ 1446



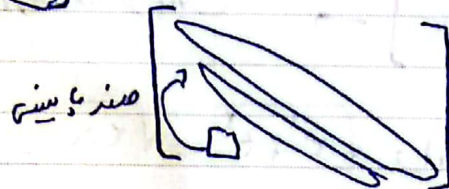
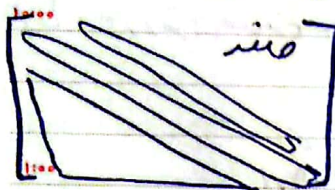
note ماتریس بالا هندسی

درایم ها در زیر قطعه فرعی یا بیینی صفد باشد



note: ماتریس پایین مثلثی: درایم های بالای قطعه اصلی صفد باشد

note: ماتریس پایین هندسی: درایم های بالای قطعه فرعی یا بیینی صفد باشد



الگوریتم ها و روش ها

کنترل پذیری را توسط عنصر بالایی می قرا حیم هفتر کنیم

شهادت حضرت امام جعفر صادق (ع) (۱۴۸ هـ ق) (تعطیل)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$



جمعه

۱۴۰۴

اردیبهشت ماه

$$K = -\text{sign}(x_1)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{6 + \|x\|}}$$

25

April 2025

شوال

۲۶ 1446

درایم اول و در قطعه حلقه

$$u = x - K e_1$$

$$P = I - \beta u u^t$$

ماتریس هسانی

ماتریس

$$A_1 \leftarrow PAP$$

در $P_{3 \times 3}$ باشد $A_{3 \times 3}$ باشد

شکست حمله نظامی آمریکا به ایران در طبس (۱۳۵۹ هـ ش)

هرگز بخاطر دوستت، از انجام وظیفه ای چشم میپوش. سن لائبر

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

A باشد 3×3

P باشد 2×2

اما

در $\tilde{P} A \tilde{P}$ در مرتبه A سه قطری می شود stop اگرچه

در غیر این صورت اگرچه یک مرحله دیگر تکرار می شود

به روش هدر ماتریس را ۳ قطری کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{اولاً متناهی است}$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$k = -\text{sign}(x_1) \delta = -(+1) 5 = -5$$

چون δ و k است
هم روی این

$$\beta = \frac{1}{5(5+3)} = \frac{1}{8} \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - (-5) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$P = I_{2 \times 2} - \beta \begin{pmatrix} u & u^t \\ u^t & u^t u \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{14}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{4}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 - \frac{14}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{4}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 - \frac{14}{2} \end{bmatrix}$$

$$(Q^t = Q^{-1}) \quad \text{متعامد}$$

Y

یکشنبه

۱۴۰۴

اردیبهشت ماه

$$A_1 \leftarrow \tilde{P} A \tilde{P}$$

۰۸:۰۰

$$A_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{131}{25} & \frac{13}{25} \\ 0 & \frac{13}{25} & -\frac{11}{25} \end{bmatrix}$$

27

April

2025

شوال

1446

اکنون A_1 سه قطری است پس stop $\square$

۰۹:۰۰

روش QR: با کمک تبدیلات هاوس هولدر، یک ماتریس A را به صورت

حاصل ضرب ۲ ماتریس Q متعامد و R بالایی می نویسیم

۱۱:۰۰

Note: تفاوت QR با هاوس هولدر این است که $A_1 \leftarrow P A$ تا زمانی که

۱۲:۰۰

A_1 بالایی شود (سروانتقذ الیوم)

Note: ضرب کردن ۳ مرتبه این شد تا $R = A_1$ شود (بالایی شود)

۱۳:۰۰

$$R \leftarrow P_3 P_2 P_1 A$$

$$Q = P_1 P_2 P_3$$

$$A = QR$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex: ماتریس A را به روش تجزیه QR

۱۵:۰۰

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

۱۶:۰۰

$$k = -(+1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{1.2(2.4)}$$

۱۷:۰۰

$$u = \frac{x - k e_1}{\|x - k e_1\|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\| \cdot \|} = \frac{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\| \cdot \|}$$

روز ایمنی حمل و نقل

تغییر آن چیزی نیست که می آموزیم آن چیزهایی ست که از دست می دهیم. جوستین گاردنر



$$P_1 = I_{3 \times 3} - \beta (u_{3 \times 1} u_{1 \times 3}^t)_{3 \times 3} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \leftarrow P_1 A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{1.5}$$

بالا فصلی نیست

$$k = -(-1)(\sqrt{1.5}) = \sqrt{1.5}$$

$$\beta = \frac{1}{(\sqrt{1.5})(\sqrt{1.5} + \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

$$u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{(\sqrt{1.5})(\sqrt{1.5} + \frac{1}{\sqrt{2}})} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = I_{3 \times 3} - \beta (u_{3 \times 1} u_{1 \times 3}^t)_{3 \times 3}$$

برای ربودن دل آدمیان باید بر هم پیشی گرفت که این زیبا ترین آورد زندگی است. ارد بزرگ

9

سه شنبه

29 April 2025

1446 ذی القعدة

اردیبهشت ماه ۱۴۰۴

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{4}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P A_1 \rightarrow A_2 = R$$

$$R = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} & -\frac{1}{\sqrt{4}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$Q = P_1 P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

روس LR (برای تبدیل به ماتریس بالا مثلثی)

ابتدا $A = A_1$ را بصورت حاصل ضرب ماتریس L و R (که L یائین مثلثی با

درایه های روس قطر اصلی یک) و R بالا مثلثی می نویسیم درایه های معکول L و R را بدست آورده

$$A_1 = L_1 R_1 \xrightarrow{\text{فرونی تبدیل } A_1 \text{ با } 2 \times 2} (A_1)_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

پس درایه های معکول L و R بدست آید

$$A_2 = R_1 L_1$$

$$A_2 = L_2 R_2$$

خوشه درایه های معکول L و R بدست آورده نیستیم $A_3 = R_2 L_2$ (که بدست آید)

آنها A_3 را بصورت $A_3 = L_3 R_3$ خوشه. این الگوریتم آنقدر تکرار می شود تا A_n

بالا مثلثی (یا قطری) شود و درایه های روس قطر اصلی، مقادیر ویژه مد نظر است.

Note. اینگونه روس می تکرار می، برای ماتریس که باید بزرگ (مانند 1000×1000)

استفاده می شود

Ex. مقادیر ویژه $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ به روس LR ؟

روش QR (برای معادله مقادیر ویژه)

Note. ماتریس A می تواند متقارن نباشد

Note. در این روش از خواص A را به ماتریس بالابندی تبدیل کنیم

عضو یا این را توسط عضو بالایی در ماتریس
عضو کنیم (با کمک جوس خواند)

اختلاف $A_1 = QR$ مانند روش قبل $A_2 = R_1 Q_1$ و عملیات برای A_3 انجام می شود (الگوریتم تکرار می شود)

Ex. روش QR برای معادله مقادیر ویژه؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مستقیم نیست

اگر فرض است $\alpha_1 = -2$ توسط عضو بالایی $\alpha_2 = 3$ عضو شود

$$\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$k = -\text{Sign}(\alpha_1) \cdot 6 = -(+1) \cdot \sqrt{13} = -\sqrt{13}$$

$$\beta = \frac{1}{6(6 + |\alpha_1|)} = \frac{1}{\sqrt{13}(\sqrt{13} + 13)}$$

$$v = x - ke_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} - (-\sqrt{13}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{13} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$P = (I)_{3 \times 3} - \beta (u u^t)_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{13}(\sqrt{13}+3)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 + \sqrt{13} \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{13} & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftarrow P_1$$

$\downarrow$
 Q_1

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -0.1132 & -0.1504 & -0.1221 \\ 0.1555 & -0.1759 & -0.1352 \\ 0 & -0.1411 & +0.912 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} -3.94 & 0.177 & 2.1775 \\ 0 & -2.1335 & -0.1917 \\ 0 & 0 & 0.9115 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \leftarrow R_1 Q_1$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.154 & 0.473 & 3.254 \\ -0.35 & 2.223 & -0.1004 \\ 0 & -0.1211 & 0.923 \end{bmatrix}$$

و این مراحل را تکرار کرد.

Subject:

Year: ... Month: ... Day: ...

مرحله چهارم

$A_{14} =$

تدریس به صورت

$$\begin{bmatrix} 3,004 & 1,220 & 1,659 \\ -0,005 & 1,994 & 3,122 \\ 0,000 & 0 & 1,000 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \approx 3,004 \rightarrow 3$$

$$\lambda_2 \approx 1,994 \rightarrow 2$$

$$\lambda_3 \approx 1 \rightarrow 1$$

بجزیره مقدار از تانین: A مرفق نیند $n \times n$ باشد ابتدا $(A^t A)$ را محاسبه کرد و $\det(A^t A - \lambda I)$

مکرار داده، مقادیر ویژه آن را بدست آوریم. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ بردارهای ویژه حقیقی به دست آوریم.

در نهایت $u_i = \frac{A v_i}{\lambda_i}$ (که به $\lambda_i = \sqrt{\lambda_i}$ برای $i \neq 0$)

خوبه شود که A حتماً مثبت اند زیرا $A^t A$ ماتریس معین مثبت است $(A \in \mathbb{R}^{n \times n})$

(ملاحظه می‌دانیم مقادیر ویژه یک ماتریس معین مثبت، مقادیر مثبت اند)

مجموع ماتریس به درجهت قعر اصل آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ حاصل می‌گردد (اند)

Ex. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 3×2

بجزیره مقدار از تانین

$$A^t A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \gamma \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\gamma \times \gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}_{\gamma \times \gamma}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\gamma & \gamma \\ \gamma & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\det(A^t A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} a & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} a-\lambda & \gamma \\ \gamma & \gamma-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= (a-\lambda)(\gamma-\lambda) - \gamma^2 = 0$$

$$= 1 - a\lambda - \gamma\lambda + \lambda^2 - \gamma^2 = 0$$

$$= \lambda^2 - \gamma\lambda + 1 = (\lambda - \gamma)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = \gamma \quad \lambda = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \gamma \quad \sigma_2 = 1$$

$$\text{if } \lambda = \gamma \rightarrow A^t A v_1 = \lambda v_1$$

$$\begin{bmatrix} a & \gamma \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow a\alpha + \gamma b = \gamma \alpha \rightarrow \alpha = \gamma \alpha \rightarrow (\alpha \neq 0) \Rightarrow \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma \alpha + \gamma b = \gamma b \rightarrow \alpha = \gamma b$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow |v_1| = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{a}$$

$$\text{norm } v_1 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{a}} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}$$

$$\text{if } \lambda = 1 \rightarrow A^t A v_2 = \lambda v_2$$

$$\begin{bmatrix} a & x \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$a a + x b = a \rightarrow x a + x b = 0$$

$$x a = -b$$

$$\text{dividing by } a \rightarrow \begin{bmatrix} -1/x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \sqrt{\frac{a}{x^2}} = \frac{\sqrt{a}}{x}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1/x}{\frac{\sqrt{a}}{x}} = \frac{-1}{\sqrt{a}} \\ \frac{1}{\frac{\sqrt{a}}{x}} = \frac{x}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}$$

$$v_1 \times v_2 = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{a}} & \frac{-1}{\sqrt{a}} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & \frac{x}{\sqrt{a}} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{4} \rightarrow a_1 = \frac{A v_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_2 = 1 \rightarrow a_2 = \frac{A v_2}{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

7/4

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 2} = (a_i)_{3 \times 2} \sum_{3 \times 2} v_i^t \quad 2 \times 2$$

$$\sum_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3 \times 2$$

- a_i را از کلام - اسمیت بدست می آوریم

Note روش کلام - اسمیت این روش برای پیدا کردن بردار متعامد استفاده می شود

حاصل قبل a_1 و a_2 را بردار 3×1 در فضا $\mathbb{R}^3$ جستجو برای اینکه به پایه برای $\mathbb{R}^3$

محسوس شوند (بعد IR^3 است) باید یک بردار سوم هم پیدا کنیم
 ← عدد یا اسکالر

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 \quad (*)$$

ضرب داخلی

✓ $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در مثال قبل است (چون فقط IR^3 است)

ادامه حل مثال ۳

$$v_3 \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + 0 + 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$$u_1 \cdot u_1 = \|u_1\|^2 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5} \end{bmatrix} =$$

← اندازه u_1 به توان ۲

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5} + 5 \right) = \frac{9}{4} = 1$$

✓ و نتیجه مقدار در مثال با هماسبه بود (*) نداشته

بردار

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} - \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

بردار

از این حل مثال

$$v_3 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$$

$$u_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

Ex. تجزیه مقدار بزرگ

$$A = \begin{bmatrix} 0.199 & 1.172 \\ 2.128 & 0.199 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 4.12 & 3.184 \\ 3.184 & 3.128 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^t A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9 \\ \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3 \end{matrix}$$

$$\Sigma_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\text{if } \lambda = 1 \rightarrow A^t A v_1 = \lambda v_1$$

$$\begin{bmatrix} 0.14 & 0.14 \\ 0.14 & 0.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

$$\text{if } \lambda = -1 \rightarrow A^t A v_2 = \lambda v_2$$

$$\begin{bmatrix} 0.14 & 0.14 \\ 0.14 & 0.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ -0.14 \end{bmatrix}$$

$$v_{XX} = \begin{bmatrix} 0.14 & 0.14 \\ 0.14 & -0.14 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 0.14 & 0.14 \\ 0.14 & -0.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

$$\text{if } \sigma_1 = 0 \rightarrow u_1 = \frac{A v_1}{\sigma_1} = \frac{0}{0}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

$$\text{if } \sigma_2 = 0 \rightarrow u_2 = \frac{A v_2}{\sigma_2}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -0.14 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

$$u_{XX} = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.14 \\ 0.14 & 0.14 \end{bmatrix}$$

Date: / /

Sat Sun Mon Tue Thu Wed Fri

Subject: -----

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 34 & 14 \\ 34 & 37 & 20 \\ 14 & 20 & 13 \end{bmatrix}$$

حل

مقادیر ویژه و بردارهای متعلق به آن

$$\det(A^T A - \lambda I_{3 \times 3}) = \det \left(\begin{bmatrix} 10 & 34 & 14 \\ 34 & 37 & 20 \\ 14 & 20 & 13 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 10-\lambda & 34 & 14 \\ 34 & 37-\lambda & 20 \\ 14 & 20 & 13-\lambda \end{bmatrix} = (10-\lambda) \begin{vmatrix} 37-\lambda & 20 \\ 20 & 13-\lambda \end{vmatrix} - (34)(14) + 20(14)$$

$$+ 14 \begin{vmatrix} 34 & 37-\lambda \\ 14 & 20 \end{vmatrix} = (10-\lambda) [(37-\lambda)(13-\lambda) - 400] - 34 [34(13-\lambda) - 280]$$

$$+ 14 [480 - 14(37-\lambda)] = 0 \quad (1)$$

محاسبه برای مقادیر ویژه و بردارهای متعلق به آن. یک از روش‌ها برای پیدا کردن ریشه‌های معادله درجه ۳ روش امتحان کردن است مثلاً $\lambda = 0$ در معادله (1) گذاشته اگر صدق کند $\lambda = 0$ ریشه است

و عبارت (1) را به $(\lambda - 1)$ تقسیم کرده تا معادله درجه ۲ بدست آید و ریشه‌های دیگر

به حسب Δ اتحادها بدست می‌آید اگر $\lambda = 0$ ریشه نباشد $\lambda = 1$ $\lambda = -1$ $\lambda = 2$ $\lambda = -2$

$\lambda = \frac{1}{2}$ $\lambda = -\frac{1}{2}$ را امتحان کرده که ریشه‌های (1) $\lambda = 0$ $\lambda = 9$ $\lambda = 11$ است

$$\lambda_1 = 11 \Rightarrow G_1 = \sqrt{11} = 3 \quad \lambda_2 = 9 \Rightarrow G_2 = \sqrt{9} = 3$$

انتخاب

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای هر مقدار ویژه یک بردار ویژه بدست می‌آوریم

$$\text{if } \lambda_1 = 11 \rightarrow (A^T A) v_1 = \lambda_1 v_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 34 & 14 \\ 34 & 37 & 20 \\ 14 & 20 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow v_1$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نرمالیزه}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

if $\lambda_1 = 9 \rightarrow (A^T A) v_1 = \lambda_1 v_1 = 9 v_1 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نرمال}} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

if $\lambda_2 = 0 \rightarrow (A^T A) v_2 = \lambda_2 v_2 = 0 \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نرمال}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

$$V_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

if $\lambda_1 = 0 \rightarrow u_1 = \frac{A v_1}{\sigma_1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $\hookrightarrow \sigma_1 = 9$

if $\lambda_2 = 9 \rightarrow \sigma_2 = 3 \rightarrow u_2 = \frac{A v_2}{\sigma_2} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$U_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تجذیب

$$A_{2 \times 3} = U \sum_{i=1}^2 \sigma_i v_i^T$$

note در $A_{m \times n}$ با $U_{n \times m}$ و $V_{n \times n}$ و $\sum_{m \times n}$ است

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ex: نشان دهید 3 بردار

یک پایه (مبنای) برای $\mathbb{R}^3$ تشکیل دهد و متعامد نیز باشد (از رانگ است)

حل: ما داریم $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ و مقدار v_1, v_2, v_3 نیز 3 تا است پس یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ اند (مستقل خطی)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

پس یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ اند (مستقل خطی اند)

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$$u_1 = v_1$$

$$u_r = v_r - \frac{v_r \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1$$

$$u_r = v_r - \frac{v_r \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1 - \frac{v_r \cdot u_r}{u_r \cdot u_r} \cdot u_r$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_r = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_r = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r \end{bmatrix} - \frac{1 \times 1 + r \times 0 + r \times 0}{1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_r = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix} \quad |u_r| = \sqrt{0^2 + r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} \Rightarrow u_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \frac{r}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$u_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix}} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix} =$$

$$u_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1 \cdot 0}{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|u_p| = \sqrt{0 + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{u_p}{|u_p|} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r}{r} \\ -\frac{r}{r} \end{bmatrix}$$

Date: / /

Sat. Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject: -----

$$\sigma_1 = \sqrt{3}$$

$$A^t A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1 \rightarrow \sigma_2 = \sqrt{1} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad : \text{Ex}$$

Date:

Sun. Mon. Tue. Thu. Wed. Fri.

Subject:

فصل جدید
دستگاه معادلات غیر خطی

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

دستگاه خطی $A_{m \times n} X_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ روش گausse

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

برای حل اینگونه دستگاه‌ها، از روش‌های سطرهای یکسانی استفاده می‌کنیم (که به صورت بلافاصله یا

پایین فیلته در می‌آوریم) برای حل گausse $[A|b]$ ماتریس افزوده را با اعمال سطرهای

یکسانی به صورت بلافاصله در آوریم و در نهایت به جواب واقعی به دست می‌آید

Note: فرض کنید x و y از $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، $\ln x$ ، $\dots$

$$x^2 + \sin^2 xy + y^2 - 2 = 0$$

دانش باقیمانده

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

که دستگاه را معادله ۲ مجهول غیر خطی است که به روش‌های فیدتن، افسون، NR و نقطه ثابت و...

تابع حل است

روش نقطه ثابت

در درس جبر خطی (یا معادلات آنالیز عددی) این روش برای پیدا کردن ریشه $f(x) = 0$ کاربرد دارد

$$f(x) = x^5 + x^3 + \frac{1}{x} = 0$$

بر خواصیم ریشه این تابع را بدست آوریم

$$|g'| < 1, x \in [a, b]$$

اگر $F(x) = g(x) - x$ مهندسی به سطرهای

$$g'(x) = \frac{5x^4 + 3x^2}{(x^5 + x^3)^2}$$

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$|g'| < 1 \quad \frac{5x^4 + 3x^2}{x} = -\frac{1}{x}$$

$$g(1) = 1 + 1 + 1 = 3 > 0$$

$$x = -\frac{1}{x^5 + x^3} = g(x)$$

$$g(-1) = -1 - 1 - 1 < 0$$

$$g'(x) = \frac{0(x^5 + x^3) - (5x^4 + 3x^2)(-1)}{(x^5 + x^3)^2}$$

$$g(1) \cdot g(-1) < 0 \quad [-1, 1] - \{0\}$$

Date: / /

Sat.

Sun.

Mon.

Tue.

Thu.

Wed.

Fri.

Subject: -----

Note: برای حل دستگاه معادلات، دیکر نیاز به محاسبه $|g'| < 1$ نیست

Ex بررسی نقطه ثابت

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1.0x + 1 = 0 \\ x + xy^2 - 1.0y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = 0.5, y_0 = 0.5, \quad \epsilon = 10^{-3}$$

حل:

$$\textcircled{1} \rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 0.1x_n^2 + 0.1y_n^2 + 1 \\ y_{n+1} = 0.1x_n + 0.1x_n^2y_n + 1 \end{cases}$$

$$\text{مرحله اول} \quad \begin{cases} x_1 = 0.1(0.5)^2 + 0.1(0.5)^2 + 1 = 0.185 \\ y_1 = 0.1(0.5) + 0.1(0.5)(0.5)^2 + 1 = 0.18425 \end{cases}$$

$$\text{مرحله دوم} \quad \begin{cases} x_2 = 0.1(0.185)^2 + 0.1(0.18425)^2 + 1 = 0.95444 \\ y_2 = 0.1(0.185) + 0.1(0.185)(0.18425)^2 + 1 = 0.95823 \end{cases}$$

$$|y_{n+1} - y_n| < \epsilon, \quad |x_{n+1} - x_n| < \epsilon \quad \text{تا زمانی که هم می دهیم}$$

	x_n	y_n	جواب واقعی
۳	۰/۹۷۹۵۳	۰/۹۷۹۷۸	$x=1$ $y=1$
۴	۰/۹۹۱۹۲	۰/۹۹۱۹۸	
۵	۰/۹۹۴۸۰	۰/۹۹۴۸۱	$ x_5 - x_4 < \epsilon$ $ y_5 - y_4 < \epsilon$
۶	۰/۹۹۸۷۲	۰/۹۹۸۷۲	
۷	۰/۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۴۹	

□

(NR)

روش نیوتن را می‌توان برای حل دستگاه غیر خطی

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

در اینجا روش NR برای پیدا کردن ریشه $f(x) = 0$ به کار می‌رود

برای حل دستگاه

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \\ h(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ xyz = 1 \\ x + y - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 = 1.8 \\ y_0 = 1.2 \\ z_0 = 1.5 \end{bmatrix}$$

Ex به روش NR

↓

$$\begin{cases} f: x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \\ g: xyz - 1 = 0 \\ h: x + y - z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} - \frac{\text{مشتقات}}{\text{مشتقات}}$$

ماتریس جکوبی

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & -2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 & 2.0 & 3.0 \\ 1.275 & 1.75 & 1.44 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (1.8)^2 + (1.2)^2 + (1.5)^2 - 9 = 1.275 \\ (1.8) \cdot (1.2) \cdot (1.5) - 1 = -0.0425 \\ 1.8 + 1.2 - (1.5)^2 = 1.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1.4919 \\ y_1 = 0.1457 \\ z_1 = 1.4409 \end{cases}$$

در روش NR

Date: / /

مردود $\begin{cases} x_r = 1, 1, 1, 1, 1 \\ y_r = 0, 1, 1, 1, 1 \\ z_r = 1, 1, 1, 1, 1 \end{cases}$

Subject: 1, 1, 1, 1, 1

مردود $\begin{cases} y_r = 0, 1, 1, 1, 1 \\ z_r = 1, 1, 1, 1, 1 \end{cases}$

$\epsilon = 10^{-3}$

$|x_r - x_r| < \epsilon$

$|y_r - y_r| < \epsilon$

$|z_r - z_r| < \epsilon$

□

$\begin{cases} x^r + y^r - 1 = 0 \\ e^x - y - 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$

SNR $\epsilon = 10^{-3}$

$\epsilon = 10^{-3}$

$\begin{cases} f = x^r + y^r - 1 \\ g = e^x - y - 1 \end{cases}$

مردود $A = \begin{bmatrix} r x & r y \\ e^x & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ e^{-1} & -1 \end{bmatrix}$

$\det A = ((-1)(-1)) - ((-1)(e^{-1})) = 1 + e^{-1} > 0$ محاسبه میزبان

$A^{-1} = \frac{1}{1 + e^{-1}} \begin{bmatrix} -1 & +r \\ -e^{-1} & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -e^{-1} & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{1 + e^{-1}} \begin{bmatrix} -1 & +r \\ -e^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{bmatrix} =$

مردود $\begin{bmatrix} -1, 1, 1, 1, 1 \\ -0, 1, 1, 1, 1 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} x_r = -1, 1, 1, 1, 1 \\ y_r = -0, 1, 1, 1, 1 \end{cases}$

مردود $\begin{cases} x_r = -1, 1, 1, 1, 1 \\ y_r = -0, 1, 1, 1, 1 \end{cases}$