$$\min w = -\overset{3y'_1}{3y_1} + 6y_2 + 2y_3 \rightarrow -\overset{2y'_1}{2y_1} + 4y_2 + y_3 \geq \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$\overset{-3y'_1}{3y_1} + 2y_2 + \frac{4}{7}y_3 \geq \frac{1}{4} \rightarrow \overset{-y'_1}{y_1} + y_2 = \frac{4}{5} \quad \rightarrow y_1 \leq 0, y_2 \text{آزاد}, y_3 \geq 0$$

$$\min w = 3y'_1 + 6y_2 + 2y_3 \rightarrow 2y'_1 + 4y_2 + y_3 \geq \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$-3y_1 + 3y_2 + \frac{4}{7}y_3 \geq \frac{1}{4} \rightarrow -y'_1 + y_2 = \frac{4}{5} \quad \rightarrow y'_1 \leq 0, y_2 \text{آزاد}, y_3 \geq 0$$

$$3y'_1 - 3y_2 - 4/7\, y_3 \leq -\frac{1}{4}$$

بخش۷: روش M بزرگ

در این روش، برای قیدهایی که بزرگ‌تر مساوی یا تساوی هستند، متغیر مصنوعی Rاضافه کرده و به تابع هدف جریمه‌ای را اعمال می‌کنیم. در مسئله مینیمم سازی به تابع هدف $+MR$ اضافه می‌کنیم.

بخش ۸: روش دو فاز

در این روش، برای قیدهای بزرگ‌تر مساوی یا تساوی، ، متغیر مصنوعی Rاضافه کرده و در فاز اول، تابع هدف را مینیمم مجموع متغیرهای مصنوعی قرار می‌دهیم و به جدول سیمپلکس اضافه کرده، تا جایی ادامه می‌دهیم که متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند. در فاز دوم، متغیرهای مصنوعی را حذف کرده، سپس سطر صفرم را پاک کرده و به‌جای آن، تابع هدف اصلی مسئله جایگزین می‌شود. سپس روش سیمپلکس را ادامه می‌دهیم تا زمانی که به بهینگی برسیم.

اکنون به بیان مثال‌های از روش Mبزرگ و روش دو فاز می‌پردازیم:

مثال: مسئله زیر را به روش M بزرگ حل کنید؟

$$\min z = 6x_1 + 2x_2$$
$$s.t.\ \ 2x_1 + 4x_2 \geq 16,$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 24, x_1, x_2 \geq 0$$

ابتدا مسئله را به‌صورت زیر نوشته، سپس جدول سیمپلکس را برای آن می‌نویسیم:

$$\max -z = -6x_1 - 2x_2 - MR_1 - MR_2$$
$$s.t.\ \ 2x_1 + 4x_2 - s_1 + R_1 = 16,$$
$$4x_1 + 3x_2 - s_2 + R_2 = 24, x_1, x_2 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	6	2	0	0	M	M	0
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24

اکنون ضرایب سطر صفرم عناصر پایه‌ای را صفر می‌کنیم:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	$-6M+6$	$-7M+2$	M	M	0	0	$-40M$
R_1	0	2	$\boxed{4}$	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24

ستون لولا: x_2
سطر لولا: R_1
عدد لولا: 4

چون مسئله ماکزیمم سازی است، منفی‌ترین ضریب در سطر صفرم مربوط به عنصر داوطلب ورود به پایه است.

«تابلوی دوم»

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	$-\frac{5}{2}M+5$	0	$-\frac{3}{4}M+\frac{1}{2}$	M	$\frac{7}{4}M-\frac{1}{2}$	0	$-12M+8$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	4
R_2	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	0	$\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{3}{4}$	1	12

ستون لولا: x_1
سطر لولا: R_2
عدد لولا: $\frac{5}{2}$

«تابلوی سوم»

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	0	0	-1	2	$M+1$	$M-2$	-16
x_2	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	0	1	0	$\boxed{\frac{3}{10}}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{24}{5}$

ستون لولا: s_1
سطر لولا: x_1
عدد لولا: $\frac{3}{10}$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	2	0	0	1	M	$M-1$	-24
x_2	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	8
s_1	0	$\frac{10}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	16

چون همه ضرایب در سطر صفرم مثبت‌اند، پس داوطلب ورود به پایه نداریم و جواب بهینه

ست.

مثال: مسئله زیر را به روش دو فاز حل کنید؟

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$$
$$2x_2 + 3x_3 = 10, x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

اکنون مسئله به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\min R_1 + R_2 + R_3 = \max -R_1 - R_2 - R_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 6,$$
$$-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + R_2 = 8,$$
$$2x_2 + 3x_3 + R_3 = 10, x_i \geq 0, R_i \geq 0$$

	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	−1	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	1	1	1	1	0	0	6
R_2	0	−2	2	4	0	1	0	8
R_3	0	0	2	3	0	0	1	10

ضرایب عناصر پایه‌ای در سطر صفرم را صفر کرده، پس داریم:

	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	−1	1	−5	−8	0	0	0	−24
R_1	0	1	1	1	1	0	0	6
R_2	0	−2	2	$\boxed{4}$	0	1	0	8
R_3	0	0	2	3	0	0	1	10

« تابلوی اول »
ستون لولا: x_3
سطر لولا: R_2
عدد لولا: 4

منفی‌ترین ضریب در سطر صفرم، مربوط به عنصر داوطلب ورود به پایه است.

	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	−1	−3	−1	0	0	2	0	−8
R_1	0	$\boxed{3/2}$	$1/2$	0	1	$-1/4$	0	4
x_3	0	$-1/2$	$1/2$	1	0	$1/4$	0	2
R_3	0	$3/2$	$1/2$	0	0	$-3/4$	1	4

« تابلوی دوم »
ستون لولا: x_1
سطر لولا: R_1
عدد لولا: $3/2$

	R	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3	RHS
R_0	-1	0	0	0	2	$3/2$	0	0
x_1	0	1	$1/3$	0	$2/3$	$-1/6$	0	$8/3$
x_3	0	0	$2/3$	1	$1/3$	$1/6$	0	$10/3$
R_3	0	0	0	0	-1	$-1/2$	1	0

اکنون مقدار تابع هدف صفر شده و متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شده‌اند و فقط یکی در پایه است که آن مقدار صفر دارد، پس پایان فاز اول است. اکنون تابع هدف اصلی مسئله را در سطر صفرم قرار می‌دهیم.

	Z	x_1	x_2	x_3	RHS
Z_0	-1	-1	2	-1	0
x_1	0	1	$1/3$	0	$8/3$
x_3	0	0	$2/3$	1	$10/3$

ضرایب متغیرهای اساسی در سطر صفرم را به صفر تبدیل می‌کنیم.

	Z	x_1	x_2	x_3	RHS
Z_0	-1	0	3	0	6
x_1	0	1	$1/3$	0	$8/3$
x_3	0	0	$2/3$	1	$10/3$

اکنون مسئله بهینه است و پایان فاز دوم است.

بخش۹: روش تک متغیر مصنوعی

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min z = cx$$
$$Ax = b, x \geq 0,$$

فرض کنید ماتریس A به‌صورت $A=[B,N]$ افراز کنیم که در آن B ماتریس پایه، نه لزوماً شدنی است. Bصرف‌نظر از شدنی بودن احتمالاً با یک مجموعه از متغیرهایی که داخل پایه هستند، متناظر هست. متغیرهای پایه را از یک تا اندیس m گذاری کنید. با ضرب محدودیت‌ها در B^{-1} داریم

$$Ix_B+B^{-1}Nx_N=\bar{b}$$

که در آن $\bar{b}=B^{-1}b$ و فرض کنید که $\bar{b}<0$ (اگر $\bar{b}\geq 0$یک جواب شدنی پایه آغازین داریم) برای این سیستم متغیر مصنوعی x_a با ضریب منفی یک به هر محدودیت با $\bar{b_i}<0$ اضافه می کنیم، این ستون را y_aمی نامیم.

$$Ix_a+B^{-1}N\,x_N+y_ax_a=\bar{b}$$

اکنون x_aرا با انتخاب سطر محورگیری r به‌صورت زیر وارد پایه می کنیم.

$$\overline{b_r}=\min\{\overline{b_i}\},\qquad if\ \overline{b_i}<0$$

توجه داریم که $\overline{b_r}<0$ با محورگیری سطر r (یعنی ورود x_a و خروج x_r) مقادیر سمت راست را به دست می‌آوریم

$$\overline{b_r'}=-\overline{b_r}(\geq 0)$$

$$\overline{b_i'}=\overline{b_i}-\overline{b_r}(\geq 0), if\ \overline{b_i}<0, i\neq r$$

$$\overline{b_i'}=\overline{b_i}(\geq 0),\ \ otherwise$$

بنابراین با وارد کردن x_aو خارج کردن x_r یک جواب شدنی پایه برای سیستم بزرگ شده به دست آورده‌ایم (از جمله شامل متغیر مصنوعی) با شروع از این جواب، روش سیمپلکی را می‌توانیم با روش دوفازی یا روش M بزرگ حل کنیم.

قابل ذکر است که x_a مسئله را یکی افزایش می‌دهد. ستون نظیر آن مجموع ستون‌های متغیر مصنوعی است که در روش دوفازی یا روش M بزرگ به مسئله اضافه می کنیم.

مثال. مسئله زیر را به روش متغیر مصنوعی حل کنید؟

$$\begin{gathered}\min 2x_1+3x_2\\ x_1+x_2\geq 3,\\ -2x_1+x_2\geq 2,\\ x_i\geq 0\end{gathered}$$

با کم کردن متغیرهای کمکی x_3و x_4با ضرب کردن در منفی یک، هر دو طرف سیستم زیر را داریم:

$$-x_1 - x_2 + x_3 = -3,$$
$$2x_1 - x_2 + x_4 = -2$$

با اضافه کردن متغیر مصنوعیx_5 با بردار فعالیت $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ به جدول آغازین مسئله فاز یک ، جدول زیر را داریم:

	0	0	0	0	-1	0
x_3	-1	1	1	0	-1	-3
x_4	2	1	0	1	-1	-2

با محورگیری سطر و ستون جدول زیر را داریم:

	1	1	-1	0	0	3
x_5	1	1	-1	0	1	3
x_4	3	0	-1	1	0	1

این جدول برای به‌کارگیری روش دوفازی آماده است.

بخش ۱۰: تباهیدگی، دوری و ایست

تباهیدگی سبب چندین مشکل مفهومی و محاسباتی در برنامه‌ریزی خطی می‌شود. در تباهیدگی باید مراقب وجود جواب‌های بهینه دگرین باشیم. همچنین باید مراقب تعبیر $\frac{\partial z}{\partial b_i} = w_i$ به‌عنوان نرخ واقعی تغییر باشیم و باید دقت کنیم که تمام پایه‌هایی که جواب بهینه را ارائه می‌دهند، لزوماً در $z_j - c_j \leq 0, 1 \leq j \leq n$ (یک مسئله مینیمم سازی) صدق نمی کنند.

مشکل محاسباتی در ناتباهیدگی، روش سیمپلکس با تعداد تکرار متناهی، با تولید یک جواب شدنی پایه و یا با این تشخیص که جواب نامتناهی است، ممکن است خاتمه یابد. درهرصورت، وقتی یک محورگیری تباهیده اتفاق می‌افتد از یک پایه به پایه دیگر تغییر جا می‌دهیم که هردو یک نقطه رأسی را نمایش می‌دهند. همچنین وقتی که فرایند تکرار می‌شود می توان تصور کرد که محورگیری تباهیده دیگری انجام می گیرد که منجر به همان نقطه رأسی ولی با پایه متفاوت می‌شود، بنابراین امکان دارد با احتمال کم، که در یک نقطه رأسی غیر بهینه توقف کنیم و محورگیری از طریق دنباله پایه‌های

ناظر که در آن انجام می گیرد. اگر همین دنباله از محور گیری دوباره و دوباره بکار رود. برای همیشه
ن پایه بدون رسیدن به جواب بهینه دور می‌زنیم.

قضیه.

به ازای یک جواب نقطه رأسی بهینه در مسئله مینیمم سازی یک پایه بهینه نظیر وجود دارد طوری که $z_j - c_j \leq 0$ به ازای تمام $1 \leq j \leq n$

مثال. مثال زیر که به بیل[1] نسبت داده شده، در نظر بگیرید.

$$\min z = -\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7$$

$$x_1 + \frac{1}{4x_4} - x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2x_4} - 12x_5 - \frac{1}{2x_6} + 3x_7 = 0$$

$$x_3 + x_6 = 1, \quad x_i \geq 0$$

جواب بهینه عبارت است از $x_1 = \frac{3}{4}, x_4 = x_6 = 1$

و سایر متغیرها صفر هستند $z^* = -\frac{5}{4}$

	0	0	0	¾	-20	½	-6	0
x1	1	0	0	¼	-8	1	9	0
x2	0	1	0	½	-12	-½	3	0
X3	0	0	1	0	0	1	0	1

	-3	0	0	0	4	7/2	-33	0
X4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x2	-2	1	0	0	4	3/2	-15	0
X3	0	0	1	0	0	1	0	1

	-1	-1	0	0	2	-18	0
X4	-12	8	0	0	8	-84	0
X5	-½	¼	0	1	3/8	-15/4	0
X3	0	0	1	0	1	0	1

	2	-3	0	-1/4	0	0	3	0
X6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
X5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	3/16	0
X3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1

1. Beale

	1	-1	0	-1/3	-16	0	0	0
X_6	2	-6	0	-5/2	56	1	0	0
X_7	1/3	-2/3	0	-1/4	16/3	0	1	0
X_3	-2	6	1	5/3	-56	0	0	1

	0	2	0	7/4	-44	-1/2	0	0
X_4	1	-3	0	-5/4	28	½	0	0
X_5	0	1/3	0	1/6	-4	-1/6	1	0
X_3	0	0	1	0	0	1	0	1

	0	0	0	¾	-20	½	-6	0
X_4	1	0	0	¼	-8	-1	9	0
X_5	0	1	0	½	-12	-1/2	3	0
X_3	0	0	1	0	0	1	0	1

مشاهده می‌کنیم که آخرین جدول با جدول اول یکسان است. تمام جدول‌ها متناظر با نقطه ‌ی هستند ولی پایه‌های متفاوت دارند. پس در این حالت الگوریتم سیمپلکس برای همیشه این پایه‌ها بدون رسیدن به نقطه بهینه دور می‌زند.

نکته (شرط لازم درجه یک): اگر $f:\Omega \to R$ تابع حقیقی $f \in C^1$ و $\Omega \subset E^n$ باشد. اگر x^* نقطه مینیمم کننده باشد آنگاه به ازای همه $d \in E^n$ که d شدنی باشد $\nabla f(x^*)d \geq 0$ (d یک جهت است).

نکته (شرط لازم): اگر $f:\Omega \to R$ که $\Omega = E^n$ باشد، در صورتی که هر نقطه‌ای که بگیریم یک نقطه داخلی باشد، همه جهت‌ها شدنی‌اند پس چون $\nabla f(x^*)d \geq 0$ برای همه جهت‌ها برقرار است، چون جهت‌ها ممکن است مثبت یا منفی باشد، بنابراین $\nabla f(x^*) = 0$.

نکته (شرط لازم درجه دو): اگر $f:\Omega \to R$ که $\Omega \subset E^n, f \in C^2$ (f تابعی مشتق‌پذیر مرتبه ۲ پیوسته باشد) اگر x^* نقطه مینیمم نسبی f بر روی مجموعه Ω باشد، آنگاه برای هر d از این فضای شدنی $d \in E^n$ آنگاه $\nabla f(x^*)d \geq 0$ و اگر $\nabla f(x^*)d = 0$ باشد در این صورت $d^t \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$.