Subject:
Year: Month: Date:

درس بهینه‌سازی خطی

۱۰ نمره پایان ترم و ۱/۵ تمرین و ۱/۵ پروژه و ۷ میان ترم

مقدمه‌ای بر تحقیق در عملیات (فقط دانشگاهی)

مدل سازی ریاضی:

فرض کنید شخص (پیمانکار) بخواهد پل هوایی بر خیابان A نصب کند. ایشان در ابتدا بودجه‌ای دارد که این بودجه را صرف هزینه دستمزد کارگران، هزینه خرید سازه‌های فلزی پل و پیچ و مهره و ... می‌باشد این هزینه‌ها را طوری مدیریت کند که max سازی سود (برای شخص) و min سازی ضرر و زیان را داشته باشد و حداکثر هزینه باید مقدار بودجه شخص باشد که این نیازها، قید (محدودیت) به مسأله اضافه می‌کند.

تابع هدف

max سود $= Z$ — min ضرر و زیان $= Z$

قیدها ← Constraints — تابع هدف — قیدها

Note: بهینه‌سازی خطی / بهینه‌سازی غیرخطی

$$\min Z = 3q_1 + 4q_2$$
$$2q_1 - 3q_2 \leq 5$$

$$\min Z = 3q_1^2 + 5\sin q_2 + \ln q_3 + q_1 q_2$$
$$3q_1 + 3q_2 \geq 4$$

در بهینه‌سازی خطی: آمد تابع هدف، توان یک باشد.

" " غیرخطی: توان ۲ (q^2) یا ($q_1 q_2$) یا ($5\sin q_2$) یا $\ln q_3$ ... باشد.

یک مثال مدلسازی برای جلسه بعد

مثال در یک کارگاه فلزی میز و صندلی تولید می‌شود. دو نوع چوب الف و ب برای ساختن استفاده می‌شود از چوب الف ۵۰۰ یارد مربع و از نوع ب ۸۰۰ یارد مربع موجود است. جهت میز ۱۲ یارد مربع از الف و ۱۸ یارد مربع از ب لازم دارد. سود خالص هر میز ۱۵ دلار و هر صندلی ۱۰ دلار است. همچنین هر صندلی ۸ یارد مربع از الف، ۱۴ یارد مربع از ب لازم دارد. مسأله را مدل سازی کنید.

حل: x_1 میز تولید ، x_2 تعداد صندلی تولیدی

میز	۱	دلار ۱۵
x_1	?	$15x_1$

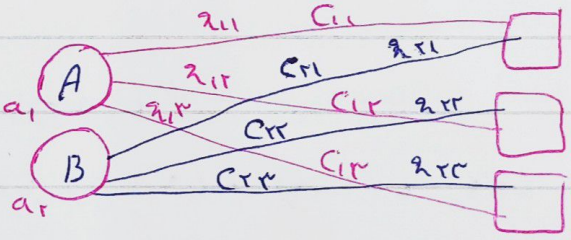
صندلی	۱	دلار ۱۰
x_2	?	$10x_2$

$$\max z = 15x_1 + 10x_2$$

نوع الف) $12x_1 + 8x_2 \le 500$ | نوع ب) $18x_1 + 14x_2 \le 800$

$$x_1, x_2 \ge 0$$ ✓

Ex: فرض کنید ۲ کارخانه A و B تولیدات خود را به ۳ فروشگاه ۱ و ۲ و ۳ ارسال می‌کنند این کارخانه‌ها a_1 و a_2 میزان تولید و فروشگاه‌ها b_1 و b_2 و b_3 میزان تقاضا دارند هزینه سیر از کارخانه i به فروشگاه j نیز c_{ij} است. مسأله را مدلسازی کنید.



x_{ij} میزان کالایی که از کارخانه i به فروشگاه j ام ارسال می‌شود

$$\min z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + C_{13}x_{13} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + C_{23}x_{23} = \sum_i \sum_j C_{ij}x_{ij}$$

کارخانه A $x_{11} + x_{12} + x_{13} \le a_1$

کارخانه B $x_{21} + x_{22} + x_{23} \le a_2$

فروشگاه ۱ $x_{11} + x_{21} \le b_1$

فروشگاه ۲ $x_{12} + x_{22} \le b_2$

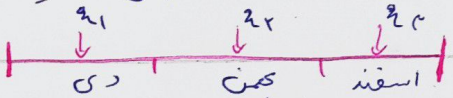
فروشگاه ۳ $x_{13} + x_{23} \le b_3$

$$x_{ij} \ge 0$$ ✓

Subject:
Year: Month: Date:

Eg. فرض کنید کارخانه‌ای برای سه ماه زمستان بخاری تولید می‌کند در ماه اول ۱۰۰ عدد ماه دوم ۱۲۰ و ماه سوم ۲۰۰ عدد تقاضا دارد. در شروع فصل زمستان هیچ بخاری در انبار است در پایان فصل زمستان نیز نباید هیچ بخاری در انبار باقی بماند. تولید هر x واحد بخاری در هر ماه، دارای هزینه x^2 است.

در صورت وجود بخاری در انبار، ۵ واحد پول هزینه می‌شود. مسأله را مدل سازی کنید.



x_i میزان تولید بخاری در ماه i ام.

ماه اول $x_1 \geq 100$

ماه دوم $(x_1 - 100) + x_2 \geq 120$

ماه سوم $(x_1 - x_2 - 220) + x_3 = 200$

$$\min Z = 5(x_1 - 100) + 5(x_1 + x_2 - 220) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

هزینه انبار در ماه دوم — هزینه انبار در ماه اول

D

Eg. قرار است تعدادی تکنسین در یک سانتی استخدام شوند شیفت کاری آنها دو شیفت ۱۲ ساعته متوالی در دو روز پشت سر هم می‌باشد (مثلاً یک شیفت ۱۲ ساعته در بعد از ظهر شنبه و شیفت بعدی در صبح یکشنبه) اگر روز جمعه را حذف کنیم مسأله را مدل‌سازی کنید تا تعداد تکنسین‌ان استخدام شد کمینه گردد.

میزان تکنسین‌ها

شنبه — صبح x_1 + عصر x_2 — b_1

یکشنبه — x_2 + x_3 — b_2

دوشنبه — x_3 + x_4 — b_3

سه‌شنبه — x_4 + x_5 — b_4

چهارشنبه — x_5 + x_6 — b_5

پنج‌شنبه — x_6 + x_1 — b_6

$$\min Z = x_1 + x_2 + \cdots + x_6$$

شنبه: $x_1 + x_2 \geq b_1$

یکشنبه: $x_2 + x_3 \geq b_2$

دوشنبه: $x_3 + x_4 \geq b_3$

سه‌شنبه: $x_4 + x_5 \geq b_4$

چهارشنبه: $x_5 + x_6 \geq b_5$

پنج‌شنبه: $x_6 + x_1 \geq b_6$

Subject:
Year: Month: Date:

Ex 1: شخصی ۲۲۰۰ دلار را می خواهد در ۵ سال آینده سرمایه گذاری کند در شروع هر سال می تواند پولش را برای یک دوره یک ساله یا ۲ ساله به حساب بگذارد. بانک ۸ درصد سود به ازای سپرده یکساله و ۱۷ درصد سود برای ۲ ساله پرداخت می کند به علاوه پیشکشی برای ۳ ساله سود ۲۷ درصد را تضمین می کند که شروع سرمایه گذاری سه ساله در شروع سال دوم باشد ۴ ساله را مدلسازی کنید تا سرمایه شخص در پایان سال پنجم max شود؟

x_{ij}: میزان پولی که شخص در سال i ام برای i سال سرمایه گذاری کند.

x_{12} ۲ سال

x_{13} ۳ سال

s_i: میزان پولی که شخص در سال i ام برای خود کنار می گذارد.

سال اول: x_{11} x_{12} s_1

دوم: x_{21} x_{22} x_{23} s_2

سوم: x_{31} x_{32} x_{33} s_3

چهارم: x_{41} x_{42} s_4

پنجم: x_{51} s_5

fig1: سناریو سرمایه گذاری

x_{11}	?
x_{12}	۱.۰۸

$1.08 x_{11}$

$1.08 x_{11} = x_{11} + 0.08 x_{11}$ سود خود پول

$= 1.08$

x_{13}	?
x_{14}	۱.۲۷

۲۲۰۰

اول: $x_{11} + x_{12} + s_1 = 2200$

دوم: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + s_2 = 1.08 x_{11} + s_1$

سوم: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + s_3 = 1.08 x_{21} + 1.17 x_{13} + s_2$

چهارم: $x_{41} + x_{42} + s_4 = 1.08 x_{31} + 1.17 x_{23} + s_3$

پنجم: $x_{51} + s_5 = 1.08 x_{41} + 1.17 x_{32} + 1.27 x_{33} + s_4$

$x_{ij} \geq 0$

$s_i \geq 0$

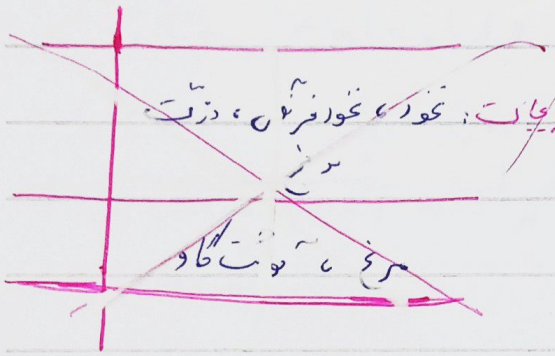
fig2: سناریو میزان پول در هر سال

محدودیت ها (قیدها)

$\max = 1.08 x_{51} + 1.17 x_{42} + 1.27 x_{33} + s_5$ + باهدف

Subject:
Year: Month: Date:

E. کارکنان فنی یک بیمارستان تصمیم دارند غذا با توصیه دهند ابتدا برنامه غذایی ناهار را بررسی می‌کنند برنامه غذایی ناهار به سه گروه اصلی سبزیجات، گوشت و دسر تقسیم می‌شود در هر سفارش حداقل یک سرویس از هر گروه باید انتخاب شود فرض کنید حداقل میزان ویتامین و پروتئین مورد نیاز در هر وعده به ترتیب ۵۰ و ۱۵۰ و ۱۰ است



		ویتامین	پروتئین	هزینه برحسب دلار
سبزیجات	نخود x_{11}	۳	۱	۰/۱
	نخودفرنگی x_{21}	۵	۲	۰/۱۲
	ذرت x_{31}	۶	۱	۰/۰۹
	برنج x_{41}	۲	۲	۰/۱۷
گوشت	مرغ x_{12}	۱	۳	۰/۹
	گوشت گاو x_{22}	۸	۵	۲/۲
دسر	آب پرتقال x_{13}	۳	۱	۰/۲۸
	پودینگ x_{23}	۲	۰	۰/۱۵
	ژله x_{33}	۰	۰	۰/۱۲

x_{ij} = {۱ اگر از گروه i ام، غذای j ام انتخاب شود ; ۰}

$$\min Z = 0/1x_{11} + 0/12x_{21} + 0/09x_{31} + 0/17x_{41} + 0/9x_{12} + 2/2x_{22} + 0/28x_{13} + 0/15x_{23} + 0/12x_{33} +$$

Subject:
Year: Month: Date:

حمید رکسن = $x_{11} + x_{21} + 2x_{31} + 5x_{41} + 2x_{12} + 3x_{22} + x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 1$

دیابتی = $2x_{11} + 5x_{21} + 4x_{31} + 2x_{41} + x_{12} + 8x_{22} + 3x_{13} + 2x_{23} \geq 10$

پزشکیان = $x_{11} + 2x_{21} + x_{31} + 2x_{41} + 2x_{12} + 5x_{22} + x_{13} \geq 10$

صحا از عصر سرده حداقل سیر آبی بشود = $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 1$

سرجان = $x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 1$

گوشت = $x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 1$

دسر = $x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 1$ (یا ۰ = x_{ij} متغیر تصمیم)

$\sum$

E۴- (سالنامه تأمین هواپیما) سه نوع هواپیمای مختلف در سیرهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ در تعدادی تیم جدول زیر ظرفیت بیشینه هواپیما و تعداد هواپیما در هر سیر را دارد.

انواع هواپیما	ظرفیت	تعداد هواپیما	تعداد پروازها روزانه در هر سیر			
			۱	۲	۳	۴
۱	۵۰	۵	۳	۲	۲	۱
۲	۳۰	۸	۴	۳	۳	۲
۳	۲۰	۱۰	۵	۵	۴	۲
			۱۰۰	۲۰۰	۹۰	۲۰۰

نوع هواپیما	۱	۲	۳	۴
۱	۱۰۰۰	۱۱۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰
۲	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
۳	۴۰۰	۴۰۰	۸۰۰	۹۰۰

زیان اعتراف سالمند	
۱	۴۰ $
۲	۵۰ $
۳	۶۵ $
۴	۷۰ $

Subject:
Year: Month: Date:

حل: y_i ; $i=1,2,3,4$ تعداد مسافر انصراف از سیر i ام

x_{ij} ; $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3,4$ تعداد هواپیما نوع i ام در سیر j ام

$$\min Z = (2\times 1000 x_{11}) + (2\times 1100 x_{12}) + (2\times 1200 x_{13}) + (1\times 1500 x_{14}) + (4\times 800 x_{21}) + (3\times 900 x_{22}) + (3\times 1000 x_{23}) + (2\times 1000 x_{24}) + (5\times 700 x_{31}) + (5\times 800 x_{32}) + (4\times 800 x_{33}) + (2\times 900 x_{34}) + 40y_1 + 35y_2 + 45y_3 + 70y_4$$

تابع هدف

قیدهای مربوط به تعداد مسافر در هر سیر

سیر ۱ : $(2\times 50 x_{11}) + (4\times 30 x_{21}) + (5\times 20 x_{31}) \geq 100$

سیر ۲ : $(2\times 50 x_{12}) + (3\times 30 x_{22}) + (5\times 20 x_{32}) \geq 200$

سیر ۳ : $(2\times 50 x_{13}) + (3\times 30 x_{23}) + (4\times 20 x_{33}) \geq 90$

سیر ۴ : $(1\times 50 x_{14}) + (2\times 30 x_{24}) + (2\times 20 x_{34}) \geq 200$

قیدهای مربوط به تعداد هواپیماها در کل سیرها

هواپیما نوع ۱ : $3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + x_{14} \leq 5$

هواپیما نوع ۲ : $4x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} \leq 8$

هواپیما نوع ۳ : $5x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \leq 10$

Subject:
Year: Month: Date:

Eg: یک شرکت ۲ نوع پنیر سوئیسی و تند تولید می کند. شرکت دارای ۶۰ کارگر ماهر است که می خواهد تعداد کارگران را در طول ۶ هفته آینده به ۹۰ کارگر افزایش دهد. هر کارگر ماهر می تواند ۳ کارگر تازه استخدام شود. را در طول دوره دو هفته آموزش دهد. که در طول این مدت کارگران دانشجو در تولید چیزی تولید نمی کنند. مسئله را در جهت افزایش کارگران با شرایط داده شده و کمینه کردن هزینه استخدام را بدست آورید.

نوع پنیر	۱	۲	۳	۴	۵	۶	هفته
سوئیسی	۱۱	۱۲	۱۳	۸	۱۶	۲۰	
تند	۵	۸	۱۰	۷	۱۲	۱۱	

هر پوند پنیر سوئیسی ۱ ساعت زمان می برد و هر ۶ پوند پنیر تند یک ساعت زمان تولید می برد هر کارگر ۴۰ ساعت تایم هفتگی دارد.

تعداد کارگران هفته اول: $(۹۰-y_1)+y_1+۳y_1$ (دانشجوها، معلم‌ها، سرکارانند)

هفته دوم: $(۹۰-y_1-y_2)+(y_1+۳y_1)+(y_2+۳y_2)$

هفته سوم: $(۹۰-y_2-y_3+۳y_1)+(y_2+۳y_2)+(y_3+۳y_3)$ (دانشجوها هفته اول که سرکارند)

هفته چهارم: $(۹۰-y_3-y_4+۳y_1+۳y_3)+(y_3+۳y_4)+(y_4+۳y_4)$

هفته پنجم: $(۹۰-y_4+۳y_1+۳y_2+۳y_3)+(y_4+۳y_4)$

هفته ششم: $(۹۰+۳y_1+۳y_2+۳y_3+۳y_4)$

فرض کنید هر کارگر ۱۱ دلار هفتگی می گیرد

Subject:
Year: تاریخ صدور Month: Date:

$$\min Z = M\left[(90 - y_1) + y_1 + 2y_1\right] + M\left[(90 - y_1 - y_2) + y_1 + 2y_1 + y_2 + 2y_2\right] + \cdots + M\left[\text{هفته ششم}\right]$$

در هفته چهارم کاربران = $(90 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4) = 90$
به ما نمی‌شوند

y_{ij} تعداد پیامک تبلیغاتی فرستاده شده در هفته i ام برای هفته j ام (هر پیامک ۲ هفته تاریخ انقضا دارد)

y_{ij} = تعداد پیامک ... در هفته i ام برای هفته j ام

محدودیت‌ها

هفته اول $\begin{cases} q_{11} = 11 \\ y_{11} = 5 \end{cases}$ هفته دوم $\begin{cases} q_{12} + q_{22} = 12 \\ y_{12} + y_{22} = 8 \end{cases}$ هفته سوم $\begin{cases} q_{23} + q_{33} = 12 \\ q_{23} + y_{23} = 10 \end{cases}$

پنجم $\begin{cases} q_{45} + q_{55} = 14 \\ y_{45} + y_{55} = 12 \end{cases}$ چهارم $\begin{cases} q_{34} + q_{44} = 8 \\ y_{34} + y_{44} = 8 \end{cases}$

ششم $\begin{cases} q_{56} + q_{66} = 20 \\ y_{56} + y_{66} = 11 \end{cases}$

پیامک ۱۰ تایی $\rightarrow \frac{q_{11}}{10}$ ، پیامک q_{11} ، ؟

هفته اول: $\frac{q_{11} + q_{12}}{10} + \frac{y_{11} + y_{12}}{4} \le 40\left[90 - y_1\right]$

هفته دوم: $\frac{q_{22} + q_{23}}{10} + \frac{y_{22} + y_{23}}{4} \le 40\left[90 - y_1 - y_2\right]$

هفته ششم ↓

Ex: (مسأله پوشش دهی موبایل)

مسأله‌ای که ما می‌خواهیم پوشش دهی برای ۲۰ ناحیه و با ۱۰ مرکز به صورتی نشان داده شده باشد
در صورتی که هر منطقه پوشش داده شود هزینه‌ای اختصاص می‌یابد
اگر ناحیه‌ای پوشش داده نشود
x_i مرکز (BTS موبایل)

Subject:
Year: Month: Date:

1 نامه $x_1 + y_1 \geq 1$

2 نامه $x_1 + x_2 + y_2 \geq 1$

3 نامه $x_1 + x_2 + y_3 \geq 1$

4 نامه $x_2 + y_4 \geq 1$

5 نامه $x_2 + y_5 \geq 1$

6 نامه $x_2 + y_6 \geq 1$

7 نامه $x_2 + x_4 + y_7 \geq 1$

8 نامه $x_2 + x_4 + y_8 \geq 1$

$\vdots$

20 نامه $x_{10} + y_{20} \geq 1$

$\min z = 0.25 y_1 + 0.45 y_2 + 0.15 y_3 + \dots + 0.99 y_{20}$

$x_i, y_i = 0$ یا 1 ✓

پایان فصل 1

Simplex (سیمپلکس)

در این فصل به حل مسائل فقط می‌پردازیم

$$\begin{cases} \text{تابع هدف} & \min = Cx \\ \text{محدودیت} & \begin{pmatrix} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min z = 2x_1 + 4x_2 \\ x_1 - 0.5 x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases} \longrightarrow$$

شکل استاندارد

$x_i \geq 0$

متغیر کمکی slack

$x_1 - 0.5 x_2 \geq 4 \longrightarrow x_1 - 0.5 x_2 - S_1 = 4$

$2x_1 + x_2 \leq 1 \longrightarrow 2x_1 + x_2 + S_2 = 1$ ← slack اضافه

متغیرها به ترتیب				
	x_1	x_2		
	$(Z_1 - C_1)$	$(Z_2 - C_2)$		Z تابع هدف
متغیرهای اساسی (B)				مقدار سمت راست
Basic	P_1	P_2	...	

Subject:
Year: Month: Date:

تمرین: مسئله زیر را به ۲ روش ترسیمی و simplex حل کنید.

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \le 4$$

$$2x_1 + 2x_2 \le 18$$

$$x_i \ge 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 \ge 0 & \text{ربع اول و چهارم} \\ x_2 \ge 0 & \text{ربع اول و دوم} \end{cases} \quad \text{اشتراک} \rightarrow \text{ربع اول}$$

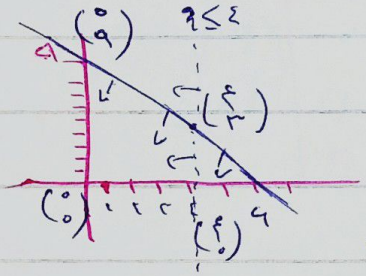
در روش ترسیمی کافی است قیدهای مسئله را رسم کنید و منطقه جواب (جواب شدنی) مشخص شود. نقاط گوشه‌ای (راسی farin) را بدست آورده و در تابع هدف گذاشته آن نقطه‌ای که بهتر است (در این مسئله max تر است) را انتخاب کنید.

$2x_1 + 2x_2 \le 18$

$x_1 \le 4$ ← $x_1 = 4$

$2x_1 + 2x_2 = 18$

x_1	0	9
x_2	9	0



$18 \le 2(0) + 2(0)$ ← (0,0) انتخاب کرد

در صورتی که نقطه داخل قید صدق کند جهت خلش به سمت نقطه است در غیر این صورت خلاف جهت نقطه، خلش را می‌زنیم.

برای می‌به تلاقی ۲ قید داریم.

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

$$2(4) + 2(x_2) = 18 \Rightarrow x_2 = 5$$

اکنون نقاط را در تابع هدف گذاشته:

if $(0,0) \rightarrow z = 2(0) + 5(0) = 0$

if $(4,0) \rightarrow z = 2(4) + 5(0) = 12$

if $(0,9) \rightarrow z = 2(0) + 5(9) = 45$

if $(4,5) \rightarrow z = 2(4) + 5(5) = 33$

در روش simplex / s_1 و s_2 slack ها افزایشی.

$x_1 + s_1 = 4$

$3x_1 + 2x_2 + s_2 = 18$

		x_1	x_2	s_1	s_2	
		-3	-5	0	0	0
متغیر پایه ای	s_1	1	0	1	0	4
	s_2	3	2	0	1	18

s_1 → b_1 → x_2 ورودی

s_2 → b_2 → خروجی

ستون لولا

عدد لولا

سطر لولا

Not : در روش simplex در سطر هدف را در یک (-1) ضرب کرده و ضرایب متغیر ها را نوشته.

Not : در ساده max سازی ، در سطر هدف آن که منفی تر است را وارد ورودی پایه و با پایه یکی از پایه خارج شود (تعادل برقرار شود)

Not : ستون غیر متغیر وارد ورودی پایه ، ستون لولا است در صورتی که در ستون لولا ، همه درایه منفی و صفر داشته باشد آن ها را در نظر نمی گیریم برای درایه های مثبت

$$\theta = \min \left\{ \frac{b_i}{\text{عناصر مثبت}} \right\}$$

ستون لولا

Subject:
Year: Month: Date:

Not : عدد لولا ، حاصل تلاقی ستون لولا و سطر لولاست.

Not :- سطر لولا ، مربوط به متغیری که داوطلب خروج از پایه است.

Not : اکنون عدد لولا را به یک تبدیل کرده (با اعمال سطری مقدماتی) و درایه های دیگر ستون لولا را به صفر تبدیل می کنیم.

به صفر تبدیل می کنیم

		$-\frac{4}{2}$	0	0	0
y_1	1	0	1	0	4
y_4	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	9

$$4y_2 + 2z_0 \longrightarrow 2z_0$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	
	3	0	0	2	18
y_3	1	0	2	0	4
y_4	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	9

چون در سطح صفرم درایه منفی نداریم. (پس داوطلب ورود به پایه نداریم مسئله max)

پس الگوریتم simplex متوقف می شود $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y_2 = 9 \\ y_1 = 0 \\ z = 18 \end{cases}$$

□

Ex : simplex با

$$\begin{cases} \max z = 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \le 6 \\ y_1 + 4y_2 - 2y_3 + y_5 \le 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 6 \\ y_1 + 4y_2 - 2y_3 + y_5 = 4 \end{cases}$$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	-2	-1	1	0	0	0
y_4	1	1	2	1	0	6
y_5	1	4	-2	0	1	4

ستون لولا

$$\theta = \min\left\{\frac{6}{1}, \frac{4}{1}\right\}$$

	q_1	q_2	q_3	s_1	s_2	
	0	7	-1	0	2	7
s_2	0	-3	3	1	-1	2
q_1	1	4	-1	0	1	4

$R_0 \to 2R_1 + R_0$

$R_1 \to -2R_2 + R_1$

$R_2 \to \frac{R_2}{3}$

	q_1	q_2	q_3	s_1	s_2	
	0	7	-1	0	2	20
q_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
q_1	1	4	-1	0	1	4

$R_0 \to R_0 + 7R_2$

$R_1 \to R_1 + R_2$

	q_1	q_2	q_3	s_1	s_2	
	0	4	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{47}{3}$
q_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
q_1	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{34}{3}$

$q_3^* = \frac{13}{3}$

$q_1^* = \frac{34}{3}$

$q_2^* = 0$

$\Big\} Z^* = \frac{47}{3}$

نکته: در مسائل کمینه سازی در صورتی که قید بزرگتر مساوی داشته باشیم از متغیر slack کاهشی استفاده می‌کنیم مثل:

$3q_1 + 5q_2 \geq 10$

$\to 3q_1 + 5q_2 - s_1 = 4$

متغیر slack کاهشی

$\to 3q_1 + 5q_2 - s_1 + R_1 = 4$

Subject:
Year: Month: Date:

درصورتی که قید تساوی داشته باشیم برای استفاده از آن در جدول simplex متغیر مصنوعی R استفاده می کنیم.

$$a x_1 - 4 x_2 = 12$$
$$\hookrightarrow a x_1 - 4 x_2 + R_2 = 12$$

برای حل آنلاین مسائل از روش M بزرگ و روش ۲ فاز استفاده می شود.

مثال: مسئله زیر را به روش simplex

$$\max z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \le 4 \quad \rightarrow + s_1 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 12 \quad \rightarrow + s_2 = 12$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \le 4 \quad \rightarrow + s_3 = 4$$

چون slack ها اضافی هستند در پایه قرار می گیرند.

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
	-2	-1	-5	3	0	0	0	0
s_1	1	2	4	-1	1	0	0	4
s_2	3	3	-1	1	0	1	0	12
s_3	1	0	1	1	0	0	1	4

$\theta = \min\left\{\frac{4}{4}, \frac{4}{1}\right\} = 1$

عدد لولا را به یک تبدیل کرده بقیه درایه ها را در ستون لولا صفر می کنیم.

x_3 ورودی و s_1 خروجی

$$\frac{r_1}{4} \rightarrow r_1 \qquad r_2 + r_1 \rightarrow r_2$$

$$r_3 \rightarrow r_1 \rightarrow r_3 \qquad 5r_1 + r_0 \rightarrow r_0$$

تا اینجا:

(Table 2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{15}{2}$
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
s_1	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{21}{2}$
s_2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{9}{2}$

$$\theta = \min\left\{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{21}{2}}{\frac{7}{2}}, \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{4}}\right\} = 3$$

$$r_1 \leftarrow r_1 + r_2\left(-\frac{1}{2}\right) \quad r_2 \leftarrow r_2 \div \frac{7}{2} \quad r_3 \leftarrow r_3 + r_2\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$r_4 \leftarrow r_4 + r_2\left(-\frac{3}{2}\right)$$

(Table 3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
	0	$\frac{43}{28}$	0	$\frac{15}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{39}{7}$
x_3	0	$\frac{11}{28}$	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
x_1	1	$\frac{9}{28}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	3
s_2	0	$-\frac{11}{28}$	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

در (Table 3) چون سطر صفرم منفی نداریم (یعنی max) این جدول جواب است.

$$x_1^* = 3 \quad x_2^* = \frac{3}{7} \quad Z^* = \frac{39}{7}$$

$$x_3^* = s_1^* = 0$$

در صورتی که بخواهیم از جدول نهایی به جدول اولیه Simplex دست یابیم باید فرض کنیم جدول نهایی زیر را داریم.

		s_1	s_2	
	$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)\ldots$		Z_{New}
x_B (متغیرهای پایه)	$(P_1)_{New}$	$(P_2)_{New}\ldots$	$[B^{-1}]_{2\times 2}$	$\begin{bmatrix} b_{1\,New} \\ b_{2\,New} \end{bmatrix} = b_{New}$

$(P_1)_{new}$ ستون زیر متغیر x_2 بالاترین زیر slack های افزایشی ماتریس سلوون B یا (B^{-1}) است.

من داینم در تابع هدف اولیه بنا نه (صورت سوال)

$C=(c_1 c_2 \cdots)$ ، $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots = CX$

$\leftarrow$ صورت بردار

در جدول اول ، مقادیر first داریم اکنون رابطه هارا می نویسیم.

$b_{new} = B^{-1} \cdot b_{first}$ / $Z_{New} = C_B \cdot b_{new} = C_B B^{-1} b_{first}$

ضرایب متغیر های پایه ای (در جدول ما فرض) در تابع هدف

$$(P_j)_{new} = B^{-1}(P_j)_{first}$$

ستون زیر x_j در جدول اولیه

$$(Z_j - C_j)_{new} = C_B B^{-1}(P_j)_{first} - C_j$$

مقدار مربوط به x_j در سطر صفرم در جدول آخر

ضریب x_j در تابع هدف

Ex: اگر جدول نهایی زیر را داشته باشیم. بنا نه اولیه؟

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
	0	4	0	1	0	0	12
x_3	0	1	1	$\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	4
x_1	1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	6
s_3	0	4	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	16

$C_B = (1, 1, 0)$

ضریب x_3 در تابع هدف

ضریب x_1 در تابع هدف

$$B^{-1}_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{new} = B^{-1} b_{first} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} b_1 - \frac{1}{2} b_2 = 4 \\ \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2 = 4 \\ \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2} b_2 + b_3 = 14 \end{cases} \rightarrow b_1 = 12,\ b_2 = 14,\ b_3 = 9$$

$$b_{first} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(P_1)_{new} = B^{-1} (P_1)_{first} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} b = 0 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = 1 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + c = 0 \end{cases} \rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c = -1$$

$$(P_1)_{first} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(P_2)_{new} = B^{-1} (P_2)_{first} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} b = 1 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = 1 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + c = 4 \end{cases} \rightarrow a = 2,\ b = 1,\ c = 3$$

$$(P_2)_{first} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(P_3)_{new} = B^{-1} (P_3)_{first} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} b = 1 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b = 0 \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + c = 0 \end{cases} \rightarrow a = 1,\ b = -1,\ c = 0$$

$$(P_3)_{first} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Subject:

Year: Month: Date:

$$(Z_2 - C_2)_{New} = C_B (P_2)_{New} - C_2$$

$$= (1, 1, 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - C_2 = 4 \rightarrow 1 + 1 - C_2 = 2 \rightarrow C_2 = -2$$

$$\max Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

$$= (1)x_1 + (-2)x_2 + (1)x_3 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

مدل نهایی max z

$$\begin{cases} \max Z = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \end{cases}$$

Subject:
Year: Month: Date:

۴: جدول نهایی زیر را داریم مسئله اولیه

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
	۰	۰	۰	۰	۴	۳	۰ z_{new}
x_1	۱	۰	۲	-۱	۱	-۱	۰ b_{new}
x_2	۰	۱	-۲	۱	۲	۳	۰

P_3 P_{4new} B^{-1}

آرجداقل یکی از مقادیر b_i صفر شده (درجا - کیپ) هوا - کیپ تاهیده (شکن) degenerate

چون در جدول m (عدد فنی بزرگ) نداریم پس متغیر مصنوعی R نداریم یا جزهایم کوچک توسادی هستند

not

s_1 s_2 انزایشی هایم slack

جدول نهایی ما سمت صفرم درایه‌های صفر پایه‌ای است زیرا همه نداریم) Not : چون در جدول m عدد فنی بزرگ داریم پس متغیر مصنوعی R نداریم یا قیدها هم کوچکتر مساوی هستند slack انزایشی

Sol مسئله maximization است

$$b_{new}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad b_{new} = B^{-1} b_{first} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -b_1 + b_2 = 0 \longrightarrow b_1 = b_2 \\ 2b_1 + 3b_2 = 0 \longrightarrow b_1 = -\frac{3}{2} b_2 \longrightarrow b_1 = b_2 = 0 \end{cases} \quad b_{first}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$Z_{new} - C_{B_{new}} b = (c_1 - c_2)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad 0 = 0$$

$$(Z_3 - C_3)_{new} = C_B (P_3)_{new} - C_3$$

$$0 = (c_1\ c_2)\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} - C_3 \Rightarrow 2c_1 - 2c_2 - c_3 = 0 \quad (2)$$

$$(Z_4 - C_4) = C (P_4)_{new} - C_4 \Rightarrow 0 = (c_1 c_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - C_4$$

(3)

$$-c_1 + c_2 - c_4 = 0$$

$(Z_5 - C_5) = (C_1\ C_2)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - 0 = 2 \Rightarrow -C_1 + 2C_2 = 2$ (۳)

ضریب S_1 در سطر صفر ↓ ضریب slack در تابع هدف صورت.

$(Z_4 - C_4)_{new} = (C_1, C_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 0 = 3 \Rightarrow C_1 + 2C_2 = 3$ (۴)

↑ C_{x_2}

۳ و ۴ ←

$$-C_1 + 2C_2 = 2$$
$$C_1 + 2C_2 = 3$$
$$4C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = 0$$

در ۲ گوشه ← $0 + 1 - C_4 = 0 \rightarrow C_4 = 1$

در ۱ گوشه ← $0 - 2C_3 = 0 \rightarrow C_3 = 2$

$$\max Z = 0(x_1) + 1(x_2) - 2(x_3) + 1(x_4)$$

$(P_1)_{new} = B^{-1}(P_1)_{first}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}-x+y=1\\ 2x+2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}y=\frac{2}{4}\\ x=-\frac{2}{2}y=-\frac{2}{2}(\frac{2}{4})=-\frac{2}{4}\end{matrix}$$

$$(P_1)_{first} = \begin{bmatrix}-\frac{2}{4}\\ \frac{2}{4}\end{bmatrix}$$

$(P_2)_{new} = B^{-1}(P_2)_{first}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}-x+y=0\\ 2x+2y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}y=\frac{1}{4}\\ x=\frac{1}{4}\end{matrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$(P_3)_{new} = B^{-1}(P_3)_{first} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}-x+y=2\\ 2x+2y=-2\end{cases} \quad x=-\frac{4}{4} \qquad (P_3)_{first} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{4}\\ \frac{2}{4}\end{bmatrix}$$

$$4y=2 \rightarrow y=\frac{2}{4}$$

$P_{4\,new} = B^{-1}(P_4)_{first}$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}-x+y=-1\\ 2x+2y=1\end{cases} \rightarrow \begin{matrix}y=-\frac{1}{4}\\ x=\frac{3}{4}\end{matrix} \quad P_{4\,first} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$\max z = 2x_1 - 2x_2 + x_4$

$$\begin{pmatrix}-\frac{2}{4}\\ \frac{2}{4}\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}-\frac{4}{4}\\ \frac{2}{4}\end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4}\end{pmatrix}x_4 \leq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$+s_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\frac{2}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{4}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \leq 1\\ \frac{2}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{2}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq 0\end{cases} \qquad x_i \geq 0$$

$+s_2 = 0$

$s_i \geq 0$

روش M بزرگ: در صورتی که قید بزرگتر مساوی یا تساوی در مسائل primal problem داشته باشیم از متغیر مصنوعی R استفاده می‌شود artifcial variable

$$2x_1 + 5x_2 \geq 4 \longrightarrow 2x_1 + 5x_2 - s_1 + R = 4$$

متغیر مازاد slack کاهشی

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \xrightarrow{\text{قید تساوی}} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + R_2 = 4$$

در صورتی که متغیر R در قید ها ای وجود دارد.

$\max z = \square - MR_1 - MR_2$

i) اگر مسئله max باشد جریمه ای به تابع هدف اضافه میشود. $(-MR_1 - MR_2)$

ii) اگر مسئله min باشد.

$\min z = \square + MR_1 + MR_2$ به تابع هدف $MR_1 + MR_2$ اضافه می‌شود.

مثال: به روش M بزرگ حل کنید؟

$$\min z = 4x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 14 \longrightarrow 2x_1 + 4x_2 - s_1 + R_1 = 14 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 12 \longrightarrow 4x_1 + 2x_2 - s_2 + R_2 = 12 \end{cases}$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	
	-4	-3	0	0	$-M$	$-M$	0
R_1	2	4	-1	0	1	0	14
R_2	4	2	0	-1	0	1	12

$$MR_1 + 2s \longrightarrow 2s$$

$$MR_2 + 2s \longrightarrow 2s$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	
	$6M-4$	$4M-3$	$-M$	$-M$	0	0	$26M$
R_1	2	(4)	-1	0	1	0	14
R_2	4	2	0	-1	0	1	12

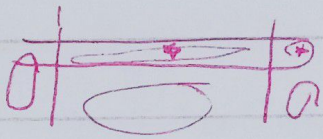
اکنون بصورت simplex شروع می‌شود.

$$\theta = \min\left\{\frac{14}{4}, \frac{12}{2}\right\}$$

روش دو فاز:

وقتی که متغیر مصنوعی R داریم از روش دو فاز (مرحله phase) استفاده می‌کنیم

فاز I: ابتدا تابع هدف مسأله، هرچه هست را چشم پوشی می‌کنیم و تابع جدید مجموع متغیرهای مصنوعی $\min \sum R_i = \min$ پس مسأله را با این تابع هدف به روش simplex حل کرده زمانی که متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند فاز I تمام می‌شود و وارد فاز II می‌شویم.



فاز II: در فاز II جدول simplex بدست آمده از فاز I را نوشته سپس تابع هدف واقعی مسأله را در منفی یک ضرب کرده و در سطر صفرم قرار داده آن متغیرهایی که پایه‌ای هستند باید ستون زیر آنها استاندارد باشد (اگر نباشد باید اعمال سطری مقدماتی را تبدیل به ستون استاندارد کنیم.) و اگر متغیر دارای طلب ورود به پایه داشته باشیم باید ضرورتاً این متغیر این عملیات آن قدر تکرار می‌شود تا جدول optimal (بهینه) شود.

مثال: روش دو فاز؟

$$\begin{cases} \max z = -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \quad :Ex$$

شروع فاز I:

$$\min z = R_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + R_1 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} R_1 \geq 0 \\ x_i \geq 0 \\ x_i \geq 0 \end{matrix}$$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_1	
	0	0	0	0	0	-1	0
R_1	1	1	-1	0	0	1	1
S_2	-1	4	0	1	0	0	4
S_3	0	1	0	0	1	0	2

صفر کنیم

سطر $x_1 + 20 \rightarrow 20$

	x_1	x_2				
	20	10	-20	0	0	10
R_1	1	1	-1	0	0	1
S_2	-10	47	0	-1	0	34
S_3	0	1	0	0	1	2

x_1 وروی R_1 ضرب

شروع فاز II : متغیر مصنوعی R از پایه خارج شده، پس پایان فاز I و شروع فاز II

سطر صفرم پاک کرده و ستون زیر R.

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
	1	-2.05	1	0	0	0
x_1	1	1	-1	0	0	1
S_2	0	7	-1	1	0	4
S_3	0	1	0	0	1	2

صفر کنیم

$-2R_1 + 20 \rightarrow 20$

عدد لولا

چون تابع هدف داخلی مسأله max، سازی است و در مسأله max سازی آن که منفی تر است (در سطر صفرم) داوطلب ورود به پایه می باشد.

$$\theta = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{4}{7}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{4}{7}$$

عدد لولا را به یک تبدیل کرد.

سپس درایه های بالا و پایین عدد لولا را صفر کنیم.

$\frac{r_2}{7} \to r_2$

		صفر شد				
	۰	-۹	۱	۰	۰	۱
s_1	۱	۱	-۱	۰	۰	۱
s_2	۰	۷	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	۰	۴
s_3	۰	۱	۰	۰	۱	۲
		صفر شد				

$9r_2 + r_0 \to r_0$

$-r_2 + r_3 \to r_3$

$-r_2 + r_1 \to r_1$

	۰	-۹	۰	۲	۹	۲
	۱	۱	-۱	۰	۰	۲
	۰	۱	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	۰	۴
	۰	۲	۲	$-\frac{1}{7}$	۱	۲
			عدد لولا			

چون مسأله max سازی بود s_1 و s_2 داوطلب ورود به پایه است. و s_3 خروجی عدد لولا را به یک تبدیل کرد $r_3 \to \frac{r_3}{2}$ سپس درایه های بالا و پایین را صفر کنیم. این عملیات را تا زمانی ادامه می دهیم که داوطلب ورود به پایه نداشته باشیم و بهینه شود.

E_3 : ۲ روش دو فازی :

$$\max Z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min Z = R_1 + R_2$$

$$\to 2x_1 + x_2 - 2x_3 + s_1 = 8$$

$$\to 2x_1 - x_2 + 2x_3 - s_2 + R_1 = 2$$

$$\to 2x_1 + 2x_2 - x_3 - s_3 + R_2 = 4$$

$$x_i \ge 0$$

$$s_i \ge 0 \quad R_i \ge 0$$

شروع فاز I :

$R_2 + 2R_0 \to R_2$

$R_3 + 2R_0 \to R_0$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	
	2	1	2	0	0	0	0	0	R_0
s_1	2	1	-2	1	0	0	0	0	8
R_1	2	-1	2	0	-1	0	1	0	2
R_2	2	3	-1	0	0	-1	0	1	4

صرفی

$$\Theta = \min\left\{\frac{8}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right\}$$

عدد لولا را به یک تبدیل کرده و درایه های بالا و پایین آن را صفر کنیم.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	
	0	$\frac{7}{2}$	-2	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	0	3
s_1	0	$\frac{3}{2}$	-3	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	7
x_1	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
R_1	0	$\frac{7}{2}$	-2	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	3

x_2 وارد می شود - R_2 خارج می شود

$$\Theta = \min\left\{\frac{7}{\frac{7}{2}}, \frac{3}{\frac{3}{2}}\right\}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	
	۰	۰	۰	۰	۰	۰	-۱	-۱	۰
s_1	۰	۰	$-\frac{۱۵}{۷}$	۱	$\frac{۴}{۷}$	$\frac{۳}{۷}$	$-\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۳}{۷}$	$\frac{۴۰}{۷}$
x_1	۱	۰	$\frac{۵}{۱۴}$	۰	$-\frac{۹}{۲۸}$	$-\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۳}{۱۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۷}$
x_2	۰	۱	$-\frac{۴}{۷}$	۰	$\frac{۱}{۷}$	$-\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۱}{۷}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۶}{۷}$

$\text{max} = ۲x_1 - x_2 + x_3$

$\therefore$

$\begin{cases} ۲r_2 + r_3 \to r_3 \\ r_3 + r_4 \to r_4 \end{cases}$

چون R_1 و R_2 از پایه خارج شدند پس شروع فاز II یعنی سراغ صفرم جدول را پاک کرده و ۰ تا بالا صدف اعداد سمت راست را در (-۱) ضرب کرده و در سطر صفرم می‌نویسیم.

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	
	۰	۰	$\frac{۳}{۷}$	۰	$-\frac{۴}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$			$\frac{۴}{۷}$
s_1	۰	۰	$-\frac{۱۵}{۷}$	۱	$\frac{۴}{۷}$	$\frac{۳}{۷}$			$\frac{۴۰}{۷}$
x_1	۱	۰	$\frac{۵}{۴}$	۰	$-\frac{۳}{۴}$	$-\frac{۱}{۱۴}$			$\frac{۵}{۷}$
x_2	۰	۱	$-\frac{۴}{۷}$	۰	$\frac{۱}{۷}$	$-\frac{۲}{۷}$			$\frac{۶}{۷}$

$r_3 \to r_3$

$\frac{r_3}{\frac{1}{7}}$

عدد لولا را به یک تبدیل کرده بقیه درایه‌ها در بالای عدد لولا را در ستون لولا به صفر تبدیل می‌کنیم

$\theta = \min\left\{ \frac{\frac{۴۰}{۷}}{\frac{۲}{۷}}, \frac{\frac{۶}{۷}}{\frac{۱}{۷}} \right\}$

$\frac{۲۰}{۶}$

	۰	-۱	-۲	۰	۰	-۱	۴
s_1	۰	-۴	-۱	۱	۰	$\frac{۱۱}{۷}$	۴
x_1	۱	$\frac{۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۲
x_2	۰	۷	-۴	۰	۱	-۲	۶

چون در جدول بالا x_2 داوطلب ورود به پایه 6 است اما سوئی تولا همه ردایه هایش سفتی اندیس داوطلب خروج از پایه نداریم پس مسأله بی‌کران $z \to +\infty$
unbounded

Note : هنگامی که در ورودی داشته باشیم آن خروجی نداشته باشیم مسأله بی‌کران

Note : هرگاه مسأله بی‌کران و مسأله min سازی باشد $z \to -\infty$
و اگر max سازی باشد $z \to +\infty$

مسأله ثانویه (دوگان - دوال) :
Dual

Note : مسأله اولیه primal (p) مسأله ثانویه Dual (D) نامش می‌دهیم.

- هر مسأله‌ای که داریم دارای مسئله ثانویه است.
- اگر مسأله (p) ، min سازی باشد ← مسأله ثانویه max سازی می‌شود
- " " min " " ← " " max " "

مسأله p	$\min z = 3x_1 + 4x_2$
مسأله D	$\max w = \square y_1 + \square y_2$

- متغیرهای مسأله p ، برحسب x_i ، متغیرهای مسأله ثانویه ، برحسب y_i اند.
- تعداد متغیرهای مسأله p ، نظیر تعداد قیدهای مسأله D است (اگر 2 متغیر x_1 در p داشته باشیم آنگاه در D ، 2 قید داریم)
- تعداد قیدهای مسأله p ، نظیر تعداد متغیرهای مسأله D است.
- (حالت استاندارد مسأله min سازی)

$$\begin{cases} \min z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- حالت استاندارد مسائل max

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Ex: مسأله دوال مسائل زیر؟

$$\begin{cases} \min Z = 2x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 - \frac{1}{2}x_2 \ge 4 \quad y_1 \\ 2x_1 - 5x_2 \ge 8 \quad y_2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \longrightarrow$$

D

$$\begin{cases} \max w = 4y_1 + 8y_2 \\ 4y_1 + 2y_2 \le 2 \\ -\frac{1}{2}y_1 - 5y_2 \le 5 \\ y_1 \le 0 \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

□

Ex: مسأله دوال زیر؟

$$\max z = 7x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 0 - 2x_3 \ge 4 \quad y_1 \\ 5x_1 + 4x_2 - \frac{1}{2}x_3 \le 4 \quad y_2 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 7 \quad y_3 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \quad x_3 \le 0 \end{cases}$$

D

$$\begin{cases} \min w = 4y_1 + 4y_2 + 7y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 7 \quad y_1 \le 0 \\ 0y_1 + 4y_2 - 2y_3 \ge -\frac{2}{3} \quad y_2 \ge 0 \\ -2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{3}y_3 \le 5 \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$$

□

Note: اگر در مساله قیدهای داشته باشیم متغیر متناظر در مساله دوگان آزاد یا free است. (و بالعکس)

Ex: مساله دوگان مسئله زیر را بنویسید

$$\begin{cases} \min z = 7x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 3 \quad y_1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 4 \quad y_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 7 \quad y_3 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \text{ آزاد} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \max w = 3y_1 + 4y_2 + 7y_3 \\ \frac{1}{2}y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 7 \\ \frac{1}{5}y_1 - 4y_2 + 5y_3 = \frac{3}{2} \\ y_1 \le 0 \\ y_2 \text{ آزاد} \\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Ex: مساله دوگان زیر را بنویسید

$$\min z = \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{3}x_2 - \frac{7}{4}x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 1 \quad y_1 \\ 2x_1 + 4x_3 = 2 \quad y_2 \\ 12x_1 + \frac{7}{2}x_2 - 10x_3 \le 1 \quad y_3 \end{cases} \Rightarrow$$

x_1 آزاد

$x_2 \le 0 \quad x_3 \ge 0$

$$\max w = y_1 + 4y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 12y_3 = \frac{1}{2} \\ 5y_1 + 0 + \frac{7}{2}y_3 \ge \frac{5}{3} \\ -y_1 + 4y_2 - 10y_3 \le -\frac{7}{4} \\ y_1 \ge 0 \quad y_2 \le 0 \\ y_3 \text{ آزاد} \end{cases}$$

□

Subject:
Year: Month: Data:

Ex: مسئله دوگان زیر را

$$\max z = 5x_1 - 7x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq 1 & y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq \frac{1}{2} & y_2 \\ 3x_1 - x_2 = 4 & y_3 \\ x_1 + 5x_2 \geq 7 & y_4 \end{cases}$$

x_2 آزاد / $x \geq 0$

$$\Rightarrow$$

$$\min w = y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 4y_3 + 7y_4$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\ -4y_1 + 4y_2 - y_3 + 5y_4 = -7 \\ y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \text{ آزاد} \quad y_4 \leq 0 \end{cases}$$

Not: درصورتی که در مسئله اولیه، $x_1 \leq 0$ (منفی باشد) آنگاه قیدِ اول در مسئله دوگانه، خلاف استاندارد است یعنی اگر مسئله دوگانه max باشد قید خلاف استاندارد آن بزرگتر مساوی است و اگر مسئله دوگانه min باشد ... کوچکتر مساوی ..

تحلیل حساسیت:

sesiviTy analysis فرض کنید جدول نهایی زیر را داریم

	x_i	
	$(z_j - c_j)$	z_{new}
متغیرهای پایه‌ای (B)	$[B^{-1}]$	b_{new}

Subject:
Year: Month: Date:

دسته اویه زیر را داریم.

$$\begin{cases} \min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

اگر تغییری در یکی از مؤلفه های c_i (ضرایب x_i در تابع هدف) یا b_i (سمت راست قیدها در مسئله اولیه) یا a_{ij} (ضرایب x_i در قیدهای مسئله اولیه) رخ دهد. می خواهیم بررسی کنیم چه تاثیری بر جدول نهایی دارد.

ا) اگر در c_i ها تغییری رخ دهد (به شرطی که x_i متغیر پایه ای نباشد)

در این صورت فقط update $(z_i - c_i)_{new}$ می شود که

$$(z_i - c_i)_{new} = c_B (p_i)_{new} - c_i$$

را update کرده در صورتی که مسئله min سازی باشد.

اگر $(z_i - c_i)_{new} \geq 0$ پس x_i داوطلب ورود به پایه است و ستون زیر آن، ستون لولاست باید متغیر خروجی برحسب θ معرفی کنیم. اگر $(z_i - c_i)_{new} < 0$ با شود داوطلب ورود به پایه نداریم و جدول optimal (بهینه) است و اگر مسئله max سازی باشد اگر $(z_i - c_i)_{new} \leq 0$ پس x_i داوطلب ورود به پایه است و خروجی برحسب θ تعیین کرده پس جدول یک دفعه update می شود.

ii) اگر c_i تغییر کند و x_i متغیر پایه ای (اساسی) باشد. پس c_B عوض می شود، یک سطر هم نرم و مقدار تابع هدف تغییر می کند.

Not : (تغییر در سمت راست قیدها (b_iها))

در صورت تغییر در $(b_i)_{first}$ به $(b_i)_{new}$ سئوال update شده و $b_{new} = B^{-1} b_{first}$ و $z_{new} = C_B b_{new}$ نیز update می‌شوند.

Not : در صورتی که یکی از مؤلفه‌های $(b)_{new}$ منفی می‌شود و مسأله infeasible شدن است پس باید از Dual simplex برویم یعنی این سطر (این متغیر خروج لولاست) و باید در مورد آن تصمیم بگیریم. اگر مسأله اصلی min سازی باشد

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{\text{عناصر منفی سطر صفرم}}{\text{عناصر منفی سطر لولا}} \right| \right\}$$

لولا — قدر مطلق

محل تقاطع سطر لولا و ستون لولا، عدد لولاست که باید به یک تبدیل شود و بقیه درایه‌ها در ستون لولا را صفر می‌کنیم. (یعنی یک فاز simplex معمولی اجرا می‌شود)

Not : در مسئله max سازی در Dual simplex داریم.

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{\text{عناصر مثبت سطر صفرم}}{\text{عناصر منفی سطر لولا}} \right| \right\}$$

قدر مطلق

Ex : مسأله اولیه زیر در جدول نهایی زیر داریم.

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 100 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	۲	۰	۴	۳	۰	۳۰۰
x_3	۱	۱	۲	۱	۰	۱۰۰
s_2	۱	۰	۰	-۱	۱	۲۰
				B^{-1}		

$$b_{first} = \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$C_B = (2, 0)$$

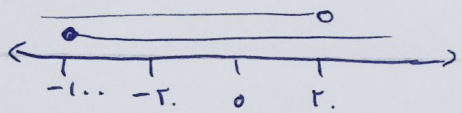
ضریب x_3 ← ضریب s_2

i) اگر $b_1 = 100 + \delta$ و δ تغییر یابد اثر آن بر جدول نهایی؟

ii) اگر $C_1 = 1$ به $C_1 = 4$ تغییر یابد اثر آن؟

$$b_{new} = B^{-1} b_{first} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 + \delta \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 + \delta \\ -100 - \delta + 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + \delta \geq 0 \\ -\delta + 20 \geq 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \delta \geq -100 \\ \rightarrow \delta \leq 20 \end{array}$$



$\delta \in [-100, 20]$ اشتراک

در این صورت مسأله شدنی است.

$$Z_{new} = C_B b_{new} = (2, 0) \begin{bmatrix} 100 + \delta \\ \delta + 20 \end{bmatrix} = \underbrace{200 + 2\delta}_{\text{مقدار تابع هدف}}$$