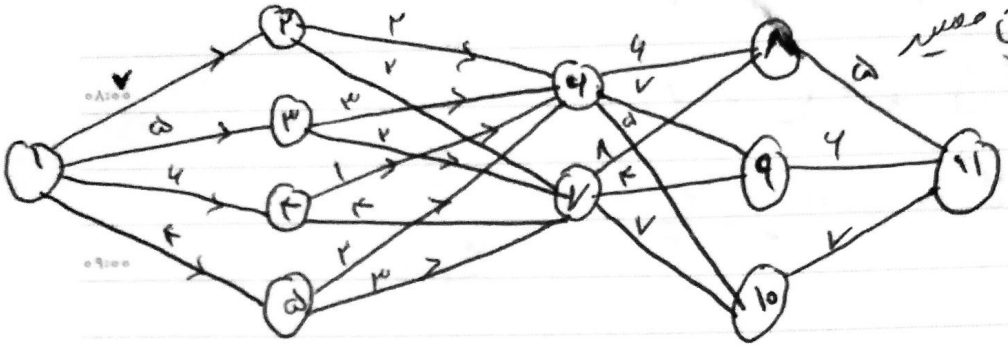
Ex مسأله کوتاه‌ترین مسیر



در مسایل برنامه ریزی پویا چون شامل تعدادی مرحله است ما از مبدأ به مقصد حرکت کنیم (پیشرو) اگر از مقصد به مبدا برگردیم (پسرو) می‌باشد. حالت پسرو در پویا راحت‌تر است

(۱) min مقدار را به می‌گذاریم

۵	۸ کره
۶	۹ کره
۷	۱۰ کره

(۲)

$\min\{\frac{4+5}{11}, \frac{7+4}{13}, \frac{5+7}{12}\}=11$	۶ → ۱۱ به ۹
$\min\{\frac{1+5}{13}, \frac{4+7}{10}, \frac{7+7}{14}\}=10$	۷ → ۱۱

(۳)

۲+۱۱=۱۳ ۲+۱۰=۱۲ $\min(13,12)=12$	۲ کره
۳→۶ ۳+۱۱=۱۴ ۳→۷ ۲+۱۰=۱۲ min=۱۲	۳ کره
۴→۶ ۱+۱۱=۱۲ ۴→۷ ۴+۱۰=۱۴ min=۱۲	۴ کره
۵→۶ ۲+۱۱=۱۳ ۵→۷ ۴+۱۰=۱۴ min=۱۳	۵ کره

(۴)

۱→۲ ۷+۱۲=۱۹ ۱→۳ ۵+۱۲=۱۷ min=۱۷ ۱→۴ ۶+۱۲=۱۸	۱ کره

۱→۵ ۴+۱۳=۱۷

۱→۵ ۹→۸→۱۱ یا ۱→۵→۹→۸→۱۱

۷→۹→۱۱ ۱→۵→۷→۹→۱۱

۱→۴→۷→۹→۱۱

پس ۳ تا کوتاه‌ترین مسیر داریم

لباس قدیمی را بپوشید ولی کتاب نو بخرید. آستین فلیپ

Ex: مساله کوله پشتی

فرض کنید n نوع شی وجود دارد که باید با این وسیله حمل شود حداکثر وزنی که با کوله پشتی می‌توان حمل کرد 5 kg است. سه نوع کالای A و B و C وجود دارد که باید حمل شود. اگر وزن و ارزش این ۳ نوع کالا به صورت جدول زیر باشد از هرکدام چه تعداد باید انتخاب کرد که با ارزش ترین محموله حمل شود؟

جدول ۱	جدول ۲	جدول ۳		
C	B	A	kg/DG	
۳	۲	۱	واحد	وزن هر
۶۰	۵۰	۲۰	کالا	ارزش هر واحد

هدف: این است که ارزش max شود

(مساله max سازی)

حل: از برنامه نویسی پویا

برای کالای C

max	۲	۱	۰	w / i
۰	—	—	●	۰
۰	—	—	۰	۱
۴۰	—	۴۰	۰	۲
۴۰	—	۴۰	۰	۳
۱۲۰	۲(۴۰)=۱۲۰	۴۰	۰	۴
۱۲۰	۲(۴۰)=۱۲۰	۴۰	۰	۵ →

به خاطر اینکه ظرفیت کوله 5kg است

متغیر i => (متغیر تصمیم) تصمیم مساله را نشان می‌دهد

متغیر w: (متغیر حالت)

۲۳ پنجشنبه
بهمن ماه ۱۴۰۴

12 February 2026
۲۳ شعبان 1447

برای کارایی B

s \ x	۰	۱	۲	max
۰	۰	—	—	۰
۱	۰	—	—	۰
۲	۶۰+۰ ③	۵۰+۰ ②	—	۶۰
۳	۶۰+۰	۵۰+۰	—	۶۰
۴	۱۲۰+۰	۵۰+۴۰	۲(۵۰)+۰	۱۲۰
۵	۱۲۰+۰ ①	۵۰+۴۰ ①	۲(۵۰)+۰	۱۲۰

① اگر $s=5$ ، ۱ واحد از B می‌خرد ۲kg
پس ۳ واحد از C برداریم که می‌شود ۶۰ تا

② اگر ظرفیت $s=5$ باشد و از B صفر واحد برداریم
پس از C باید ۵ تا برداریم

اگر $s=5$ ، ۲ تا واحد از B برداریم ← $1=2(2)-5$ پس از C
برداریم که صفر می‌شود ← $2(50)+0$

③ اگر $s=2$ باشد و برای B صفر واحد برداریم پس ۲ واحد از برداشتیم که می‌شود ۶۰ تا

④ اگر $s=2$ و $B \perp$ برداریم و وزن آن ۲kg است که ارزش آن ۵۰ است

$50+0$ صفر واحد از C برداریم

۲۴ جمعه
بهمن ماه ۱۴۰۴

13 February 2026
۲۴ شعبان 1447

جدول A

s \ x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	max
۰	۰	—	—	—	—	—	۰
۱	۰	۲۰+۰	—	—	—	—	
۲	۹۰ ①	۲۰+۰ ②	۲(۲۰)+۰	—	—	—	
۳	۴۰	۲۰+۴۰ ③	۴۰+۰ ④	۶۰+۰	—	—	
۴	۱۲۰	۲۰+۴۰	۶۰+۴۰	۶۰+۰	۸۰+۰	—	
۵	۱۲۰	۴۰+۱۲۰	۴۰+۴۰	۳(۲۰)+۴۰ ⑤	۸۰+۰	۱۰۰+۰	

به زبانت اجازه نده که قبل از اندیشه ات به کار افتد شیلون

۰۸:۰۰ ① اگر $s=2$ باشد از A ۰ صفر واحد برداریم پس از جدول B باید ۲ واحد برداریم که می شود ۴۰ ت

۰۹:۳۰ ② اگر $s=2$ از A یک واحد برداشته که ارزش آن ۲۰ ت است پس $2-1=1$ از جدول B برداشته که صفر است

۱۰:۰۰

۱۱:۰۰ ③ اگر $s=3$ ۰ ۱ واحد از A برداریم ارزش ۲۰ ت پس $3-1=2$ از جدول B برداشته که ۴۰ ت ارزش آن است

۱۲:۰۰ ④ اگر $s=5$ باشد ۳ واحد A برداریم $(3)(20)=60$ ارزش آن و $5-3=2$ از جدول B برداشته که ارزش آن ۴۰ است

۱۳:۰۰

۱۴:۰۰ max ارزش ۱۴۰ است که در $s=5$ و ۱ واحد A برداریم پس $5-1=4$ پس ۴ از جدول B برداریم که برای B صفر واحد برمی داریم پس ۴ واحد می ماند که از جدول C برداریم پس ۲ واحد C برمی داریم

۱۵:۰۰

۱۶:۰۰

۱۷:۰۰

مسأله ثانویه (دوگان - دوال) :
Dual

Note : مسأله اولیه (P) primal مسأله ثانویه (D) Dual نمایش می‌دهیم.

- هر مسأله‌ای که داریم دارای مسئله ثانویه است.
- اگر مسأله (P) min سازی باشد ← مسأله ثانویه max سازی می‌شود،
- " " min " " ← " " max " " "

P مسأله $\min Z = 3x_1 + 4x_2$

D مسأله $\max w = \square y_1 + \square y_2$

- متغیرهای مسأله P برحسب x_i ، متغیرهای مسأله ثانویه، برحسب y_i اند.
- تعداد متغیرهای مسأله P ، نظیر تعداد قیدهای مسأله D است (اگر 4 متغیر x_i در P داشته باشیم آنگاه در D ، 4 قید داریم)
- تعداد قیدهای مسأله P ، نظیر تعداد متغیرهای مسأله D است.
- (حالت استاندارد مسأله min سازی)

$$\begin{cases} \min Z = Cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

حالت استاندارد مسائل ماکزیمم

Ex: مسأله دوال مسأله زیر؟

$$\begin{cases} \min Z = 2x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 - \frac{1}{2}x_2 \ge 2 \quad y_1 \\ 2x_1 - 5x_2 \ge 1 \quad y_2 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \longrightarrow$$

D

$$\begin{cases} \max w = 2y_1 + y_2 \\ 4y_1 + 2y_2 \le 2 \\ -\frac{1}{2}y_1 - 5y_2 \le 5 \\ y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

□

Ex: مسأله دوال زیر؟

$$\begin{cases} \max z = 7x_1 - \frac{3}{4}x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 0 - 2x_3 \ge 4 \quad y_1 \\ 5x_1 + 4x_2 - \frac{1}{2}x_3 \le 4 \quad y_2 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{4}x_3 \le 7 \quad y_3 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \quad x_3 \le 0 \end{cases}$$

D

$$\begin{cases} \min w = 4y_1 + 4y_2 + 7y_3 \\ 4y_1 + 5y_2 + y_3 \ge 7 \quad y_1 \le 0 \\ 0y_1 + 2y_2 - 2y_3 \ge -\frac{3}{4} \quad y_2 \ge 0 \\ -2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{4}y_3 \le 3 \quad y_3 \ge 0 \end{cases}$$

□

Note: اگر در مسأله قید نامساوی داشته باشیم متغیر متناظرش در مسأله دوگان آزاد (free) است. (و بالعکس)

Ex: مسأله دوگان مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را بنویسید.

$$\begin{cases} \min z = 7x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \le 5 \quad y_1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \quad y_2 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 7 \quad y_3 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \text{ آزاد} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} \max w = 5y_1 + 4y_2 + 7y_3 \\ \frac{1}{2}y_1 + 3y_2 + 2y_3 \le 7 \\ \frac{1}{5}y_1 - 4y_2 + 5y_3 = \frac{3}{2} \\ y_1 \le 0 \\ y_2 \text{ آزاد} \\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Ex: مسأله دوگان زیر را بنویسید:

$$\min z = \frac{1}{2}x_1 + \frac{4}{5}x_2 - \frac{7}{4}x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \ge 1 & y_1 \\ 3x_1 + 4x_3 = 4 & y_2 \\ 12x_1 + \frac{7}{2}x_2 - 10x_3 \le 2 & y_3 \end{cases} \Rightarrow$$

x_1 آزاد

$x_2 \ge 0$ $\quad x_3 \le 0$

$$\max w = y_1 + 4y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 12y_3 = \frac{1}{2} \\ 5y_1 + 0 + \frac{7}{2}y_3 \ge \frac{4}{5} \\ -y_1 + 4y_2 - 10y_3 \le -\frac{7}{4} \\ y_1 \ge 0 \quad y_2 \le 0 \\ y_3 \text{ آزاد} \end{cases}$$

□

$$\max z = 5x_1 - 7x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq 1 & y_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq \frac{1}{2} & y_2 \\ 3x_1 - x_2 = 4 & y_3 \\ x_1 + 5x_2 \geq 7 & y_4 \end{cases}$$

x_2 آزاد $x_1 \leq 0$

$\Rightarrow$

مثال: مسأله دوگان زیر را

$$\min w = y_1 + \frac{1}{2}y_2 + 4y_3 + 7y_4$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\ -4y_1 + 4y_2 - y_3 + 5y_4 = -7 \\ y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \text{ آزاد} \\ y_4 \leq 0 \end{cases}$$

Not: درصورتی که در مسأله اولیه $x_i \leq 0$ (منفی باشد) آنگاه قید اول در مسأله دوگانه، خلاف استاندارد است یعنی اگر مسأله دوگانه max باشد قید خلاف استاندارد آن بزرگتر مساوی است و اگر مسأله دوگانه min باشد "کوچکتر مساوی است".

Not: به تعداد متغیرهای مسأله اولیه قید در مسأله دوگانه داریم.

- به تعداد محدودیت ها یا قیدهای مسأله اولیه متغیر در مسأله دوگانه داریم (آزاد x_i در مسأله اولیه باشد قید اول در مسأله دوگانه به صورت مساوی است اگر قید اول در مسأله اولیه مساوی باشد متغیر اول در مسأله دوگانه آزاد است)

تحلیل حساسیت:

sesivity analysis فرض کنید جدول نهایی زیر را داریم

	x_i		
	$(z_j - c_j)$		z_{new}
متغیرهای پایه ای (B)	x	$[B^{-1}]$	b_{new}

دسته اویه زیر را داریم.

$$\begin{cases} \min z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

اگر تغییری در یکی از مؤلفه های c_i (ضرایب x_i در تابع هدف) یا b_i (سمت راست قیدها در مسئله اولیه) یا a_{ij} (ضرایب x_i در قید های مسئله اولیه) رخ دهد. می خواهیم بررسی کنیم چه تاثیری بر جدول نهایی دارد.

i) اگر در c_i ها تغییری رخ دهد (به شرطی که x_i متغیر پایه‌ای نباشد)

در این صورت فقط $(z_i - c_i)_{new}$ update می شود که

$$(z_i - c_i)_{new} = c_B (p_i)_{new} - c_i$$

را update کرده در صورتی که مسئله min سازی باشد.

اگر $(z_i - c_i)_{new} \geq 0$ پس x_i داوطلب ورود به پایه است و ستون زیر آن، ستون لولاست باید متغیر خروجی برحسب θ مشخص کنیم. اگر $(z_i - c_i)_{new} \leq 0$ یا شود داوطلب ورود به پایه نداریم و جدول optimal (بهینه) است و اگر مسئله max سازی باشد اگر $(z_i - c_i)_{new} \leq 0$ پس x_i داوطلب ورود به پایه است و خروجی برحسب θ تعیین کرده پس جدول یک دفعه update می شود.

ii) اگر c_i تغییر کند و x_i متغیر پایه‌ای (اساسی) باشد. پس c_B عوض می شود، یک سطر صفرم و مقدار تابع هدف تغییر می کند.

Not : (تغییر در سمت راست قیدها (b_i))

در صورت تغییر در $(b_i)_{first}$ و b_{first} به b_{new} از رابطه $b_{new} = B^{-1} b_{first}$ و $(b_i)_{first}$ به $(b)_{new}$ update شده و $z_{new} = C_B b_{new}$ نیز update می‌شود.

Not : در صورتی که یکی از مؤلفه‌های $(b)_{new}$ منفی می‌شود، و مساله infeasible شدن است پس باید از Dual simplex برویم یعنی این سطر (این متغیر خروجی لولاست) و باید در روی آن تعیین کنیم. اگر مساله اصلی min سازی باشد

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{\text{عناصر منفی سطر صفر}}{\text{عناصر منفی سطر لولا}} \right| \right\}$$

قدر مطلق

حل تمامی سطر لولا و ستون لولا، عدد لولاست که باید به یک تبدیل شود، و بقیه درایه‌ها در ستون لولا را صفر می‌کنیم. (یعنی یک فاز simplex معمولی اجرا می‌شود)

Not : در مسئله max سازی در Dual simplex داریم.

$$\theta = \min \left\{ \left| \frac{\text{عناصر مثبت سطر صفر}}{\text{عناصر منفی سطر لولا}} \right| \right\}$$

قدر مطلق

Ex مساله اویه زیر در جدول های زیر داریم.

$$\begin{cases} \max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 100 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Subject

Year: Month: Date:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	۲	۰	۴	۳	۰	۳۰۰
x_3	۱	۱	۲	۱	۰	۱۰۰
s_2	۱	۰	۰	-۱	۱	۲۰۰
				B^{-1}		

$$b_{first} = \begin{bmatrix} ۱۰۰ \\ ۲۰۰ \end{bmatrix}$$

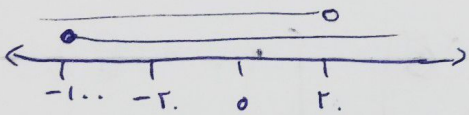
$C_B = (۲, ۰)$ ← ضریب x_3 ، ضریب s_2

i) آیا $b_1 = ۱۰۰ + ۴$ و $b_1 = ۱۰۰$ تغییر یا به اثر آن بر جدول نهایی؟

ii) آیا $C_1 = ۱$ و $C_1 = ۴$ تغییر یا به اثر آن؟

$$b_{new} = B^{-1} b_{first} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۰۰ + ۴ \\ ۲۰۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۰۰ + ۴ \\ -۱۰۰ - ۴ + ۲۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰۰ + ۴ \geq ۰ \\ -۴ + ۱۰۰ \geq ۰ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow ۴ \geq -۱۰۰ \\ \rightarrow ۴ \leq ۱۰۰ \end{array}$$



$۴ \in [-۱۰۰, ۲۰]$ ← اثر آن

✓ در این صورت مسأله شدنی است.

$$Z_{new} = C_B b_{new} = (۲, ۰) \begin{bmatrix} ۱۰۰ + ۴ \\ ۴ + ۲۰ \end{bmatrix} = \underbrace{۲۰۰ + ۲۴}_{\text{مقدار تابع هدف}}$$

Ex: جدول نهایی simplex بصورت زیر است.

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 100$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 120 \qquad x_i \ge 0$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	2	0	4	3	0	200
x_3	1	1	2	1	0	100
s_2	1	0	0	-1	1	20

B^{-1}

i) اگر $b_1 = 100$ به $b_1 = 100 + 2\delta$ تغییر کند اثر آن به جدول؟

ii) اگر $C_3 = 2$ به $C_3 = 8$ تغییر کند اثر آن به جدول؟

i)
$$b_{new} = B^{-1} b_{first} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 + 2\delta \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 2\delta \ge 0 \\ 100 - 2\delta + 120 \ge 0 \end{bmatrix}$$

(1) $2\delta \ge -100 \rightarrow \delta \ge -50$

(2) $220 - 2\delta \ge 0 \rightarrow \delta \le 110$

اشتراک $\rightarrow -50 \le \delta \le 110$

$\delta \in [-50, 110]$

دراین بازه تغییر موجود باشد نشدنی بودن مسأله اتفاق می افتد

$$Z_{new} = C_{13} b_{new} = (3,0) \begin{pmatrix} 100 + 2\delta \\ 20 - 2\delta \end{pmatrix} = 300 + 6\delta$$

ii) چون C_B ستونه مربوط به متغیر تغییر پیدا می‌کند است پس ضریب x_4 در سطر صفر نقطه عوض می‌شود.

$$(Z_4 - C_4)_{new} = C_B (P_4)_{new} - C_4 = \dots$$

$$(3,0)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - 8 - 6 - 8 = -24 < 0$$

اکنون چون ستونه max سازی است پس x_4 را وارد مدل می‌کنیم به اندازه عدد لول را تعیین کرده x_4 فرض است باید عدد لول را به یک متغیر کنیم و ردیف بالا و پایین صفر می‌شود و یک مرحله جدید update می‌شود.

Ex: مسأله اولیه و جدول نهایی زیر را داریم:

$$\max Z = 20x_1 + 10x_2$$

$$5x_1 + 4x_2 \le 24$$

$$3x_1 + 5x_2 \le 12$$

$$b_{first} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$c_B = (20, 0)$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS یا b
	0	4	4	0	Z_{new}
x_1	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5}$	0	b_1
s_2	0	$\frac{17}{5}$	$\frac{-2}{5}$	1	b_2

B^{-1}

الف) مجهولات x_1, x_2, s_1, s_2 نیز

ب) اگر $3x_1 - 4x_2 \le 5$ به جدول نهایی اضافه شود تغییر؟

اگر $5 \le 3x_1 - 4x_2$ به جدول اضافه شود؟

ج) $b_{new} = B^{-1} b_{first} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} + 0 \\ -\frac{48}{5} + 12 = \frac{17}{5} \end{pmatrix}$

$$Z_{new} = c_B b_{new} = (20 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{17}{5} \end{pmatrix} = \frac{480}{5}$$

د) برای اضافه کردن متغیر (کوچک‌ترمساوی) ابتدا مقادیر x_1^* (جواب بهینه مسأله) را در داخل متغیر قرار می‌دهیم تا ببینیم آیا صدق می‌کند که اضافه کردن متغیر تأثیری بر جدول نهایی ندارد. در صورتی که فقط در متغیر صدق نکند، آنگاه قیود $3x_1 + 4x_2 + s_3$ را به جدول نهایی اضافه کنیم پس یک سطر (مربوط به متغیر) و یک ستون (مربوط به s_3) به جدول اضافه می‌شود.

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= b_1 = \frac{24}{5} \\ x_2^* &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 3\left(\frac{24}{5}\right) - 4(0) \overset{?}{\le} 5$$

	q_{r1}	q_{r2}	s_1	s_2	s_3	
	۰	۶	۴	۰	۰	$\frac{۴۸۰}{۵}$
q_1	۱	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	۰	$\frac{۲۴}{۵}$
s_2	۰	$\frac{۱۷}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	۱	۰	$\frac{۱۷}{۵}$
s_3	۳	-۴	۰	۰	۱	۵

متغیر ورودی

$\frac{۷۲}{۵} \leq ۵$ ✗

$۳q_1 + ۷s_2 \rightarrow ۷s_2$

		q_{r2} ↓				
	۰	۶	۴	۰	۰	$\frac{۴۸۰}{۵}$
q_1	۱	$\frac{۵}{۴}$	$+\frac{۱}{۵}$	۰	۰	$\frac{۲۴}{۵}$
s_2	۰	$\frac{۱۷}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	۱	۰	$\frac{۱۷}{۵}$
s_3	۰	$\frac{-۳۱}{۴}$	$-\frac{۲}{۵}$	۰	۱	$\frac{-۴۷}{۵}$

عدد لولا

$b_2 < ۰$

چون $b_2 < ۰$ منفی است پس سامانه نشدنی یا بیدار... دوال برو یم (پس s_2 خروجی باید ورودی تعیین کند)

$$\theta = min \left\{ \left| \frac{\text{عناصر ستون سوا صفر}}{\text{عناصر ستون متغیر لولا}} \right| \right\} = min \left\{ \left| \frac{۴}{-\frac{۲}{۵}} \right| , \left| \frac{۶}{-\frac{۳۱}{۴}} \right| \right\}$$

برای سامانه maximization

q_2 ورودی $\rightarrow \theta = \left\{ \frac{۲۴}{۳۱} , \frac{۲۰}{۳} \right\} = \frac{۲۴}{۳۱}$

s_2 خروجی

اکنون عدد لولا را به یک تبدیل کرده

$$۷۳ \rightarrow \frac{۷۳}{\frac{۳۱}{۴}}$$

و درایه های بالای عدد لولا را صفر می سازیم.

ج) برای هنر بزرگتر مساوی، ابتدا نقطه بهینه را در راس هنر گرانشه آن صدق کند که بسنده optimal.

- آن صدق نکند هنر را به جدول اضافه کرده (هنر بزرگتر مساوی یک q_3 (slack variable) یک R (متغیر مصنوعی) لازم دارد پس یک ستون و ۲ سطر (ستون q_3 و ستون R) به جدول اضافه می‌کنیم. ضریب R در سطر صفر، اگر بسنده max بود $-M$ و اگر min بود $+M$ می‌شود.

$$q_1^* = \frac{24}{5} \quad , \quad q_2^* = 0$$

$$3q_1 - 4q_2 \geq 5$$

$$3\left(\frac{24}{5}\right) - 4(0) \geq 5$$

$$\frac{72}{5} \geq 5 \checkmark$$

چون نقطه در هنر صدق می‌کند پس نقطه $q_1^* = \frac{24}{5}$ و $q_2^* = 0$ بهینه است و بسنده شد. ◻

Ex. آگر در مثال مقابل، $C_2 = 3$ به $C_2 = 4$ تغییر یابد:

ب) آگر هنر $3q_1 - q_2 \leq 50$ اضافه شود اثر آن؟

$(C_1) = 1$ ، $(C_2) = 2$

	0	0	4	2	1	320
q_4	0	1	2	-1	2	80
q_1	1	0	0	1	-1	20

B^{-1}

$$b_{new} = \begin{bmatrix} 80 \\ 20 \end{bmatrix}$$

ج) آگر هنر $3q_1 - q_2 \geq 50$ اضافه شود اثر آن؟

- آگر $C_1 = 1$ به $C_2 = 2$ تغییر یابد.

ب) چون x_2 متغیر اساسی است، C_2 صفر شده پس ضمن سطر صفرم عوض می‌شود، چون x_1 و x_4 در پایه هستند آنگاه $(z_1 - c_1)_{new}$ و $(z_2 - c_2)_{new}$ را محاسبه نیم بازهم صفر می‌شوند. چون ضریب x_3 (یعنی c_3) را نداریم پس از روی جدول ابتدا c_3 را بدست می‌آوریم پس مقدار جدید را update می‌نیم

$(z_3 - c_3)_{new} = c_B (P_3)_{new} - c_3$ (از روی جدول)

$4 = (2\ 1)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - c_3 = 4 - c_3 \rightarrow c_3 = 0$

اکنون مقدار $(z_4 - c_4)_{new}$ را محاسبه می‌کنیم

شرط بهینه در جدول

$(z_3 - c_3)_{new} = c_B (P_3)_{new} - c_3$

$= (2\ 1)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - 0 = 4 > 0$

اکنون برای x_4 و $(z_4 - c_4)_{new}$ را بدست آورده،

$(z_4 - c_4)_{new} = (2\ 1)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} - 0 = 4 - 1 = 3 > 0$

ضریب x_4 در تابع هدف همواره برابر صفر است

برای x_5 محاسبه کرده

$(z_5 - c_5)_{new} = (2\ 1)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 0 = -2 + 1 = -1 < 0$

چون ضریب x_5 در سطر صفرم منفی شد پس x_5 وارد جدول می‌شود و x_4 خروج است عدد لولا که یک است، دلایل مان برای عدد لولا را صفر می‌کنیم

$z_{new} = c_B b_{new} = (2\ 1)\begin{pmatrix}80\\20\end{pmatrix} = 220 + 20 = 240$

ii) تابع جدول داریم $\begin{cases} x_1^* = 20 \\ x_2^* = 80 \end{cases}$ در قید کنار گذاشته.

$2x_1 - x_2 \leq 50 \rightarrow 2(20) - 80 = 40 - 80 = -40 < 0$ ✓

چون نقطه بهینه در قید صدق می‌کند پس تأثیری بر جدول ندارد.

$2z_1 - z_2 \geq 50 \rightarrow T(20) - 80 = -40 \neq 0$ ✗ (ناسازگار)

پس متغیر R_1 با ضریب $2z_1 - z_2 - s_2 + R_1 = 50$ به مدل اضافه کنیم.

چون تابع max بازده است ضریب R_1 در سطر صفر $-M$ است.

	z_1	z_2	s_1	s_2	R_1	
	0	0	$3M$	$-2M$	$-M$	$50M$
z_2	0	1	2	-1	0	80
z_1	1	0	-1	1	0	20
R_1	2	-1	-2	1	1	90

متغیر ورودی: z_1 — متغیر خروجی: R_1

← این عملیات جبری را انجام می‌دهیم تا ستون متغیر ورودی در سطر صفر صفر شود. پس داده‌های سطر اول باید به‌روز (update) شوند.

$$\begin{cases} -2r_1 + r_2 \rightarrow r_2 \\ r_1 \rightarrow r_1 \\ -3r_1 + r_3 \rightarrow r_3 \end{cases}$$

	z_1	z_2	s_1	s_2	R_1	
	0	0	$-3M+4$	$2M-1$	$-M$	$50M$
z_2	0	1	2	-1	0	80
z_1	1	0	-1	1	0	20
R_1	0	0	4	-2	1	90

$$\theta = \min\left\{\frac{80}{2}, \frac{90}{4}\right\}$$

z_1 ورودی
R_1 خروجی

عدد محوری را به یک تبدیل کرده و درایه‌های بالا و پایین آن را صفر می‌کنیم.

$$\frac{r_3}{4} \rightarrow r_3$$

$$\begin{cases} r_3 + r_1 \rightarrow r_1 \\ -2r_3 + r_2 \rightarrow r_2 \\ -(-3M+2)r_3 + r_0 \rightarrow r_0 \end{cases}$$

Net : (اضافه کردن یک متغیر به جدول نهایی)

برای گذاردن آن متغیر در جدول کافی است $(P_j)_{new}$ و $(z_j - c_j)_{new}$ را بدست آوریم

$(z_j - c_j)_{new}$	
$(P_j)_{new}$	

اگر مسأله max سازی و $(z_j - c_j)_{new} \geq 0$ شود داو طلب ورودبه پایه است و باید ضرایب تعیین کرد.

Ex : مسأله اویه و جدول نهایی زیر را داریم.

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 120$$

$$x_i \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
	2	0	4	2	0	40
x_2	1	1	2	1	0	100
s_2	1	0	0	-1	1	20

B^{-1}

آمد x_4 و $c_4 = 5$ و $(P_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ به جدول نهایی اضافه شود.

$$(P_4)_{first} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

تغییرات در جدول؟

$$C_B = (0 \quad 2)$$

ضریب x_2 در تابع هدف ← ضریب x_2 در تابع هدف

$$(P_4)_{new} = B^{-1}(P_4)_{first} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(z_4 - z_4)_{new} = C_B (P_4)_{new} - c_4 = (20)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 = 3 - 5 = -2 < 0$$

داو طلب ورود به پایه است.

$$\theta = \min\left\{ \frac{100}{1}, \frac{20}{3} \right\}$$

x_4 وارد می - s_2 خارج

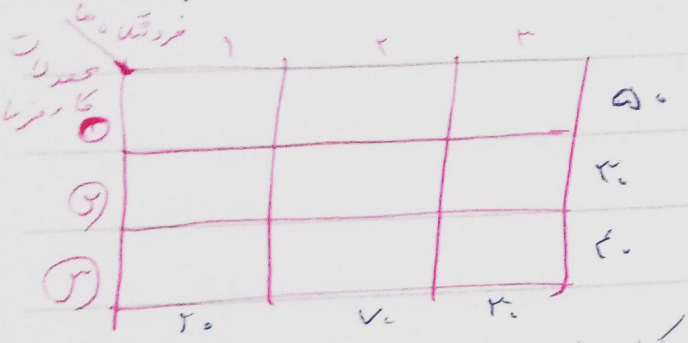
	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	
	2	0	4	(-2)	2	0	40
	1	1	2	1	1	0	100
	1	0	0	(3)	-1	1	20

محور

عرلولا را به کیپ تبدیل کرده.

$$\begin{cases} \frac{۲۲}{۳} \longrightarrow ۲۲ \\ ۲۲ + ۲۱ \longrightarrow ۲۱ \\ ۲۲ + ۲۰ \longrightarrow ۲۰ \end{cases}$$

روش تخصیص :



فرض کنیم محصولات ۳ کارخانه را (که هرکدام دارای سفارش توسعه یا عرضه هستند) به سه فروشگاه (که هرکدام دارای تقاضایی می باشند) ارسال کنیم.

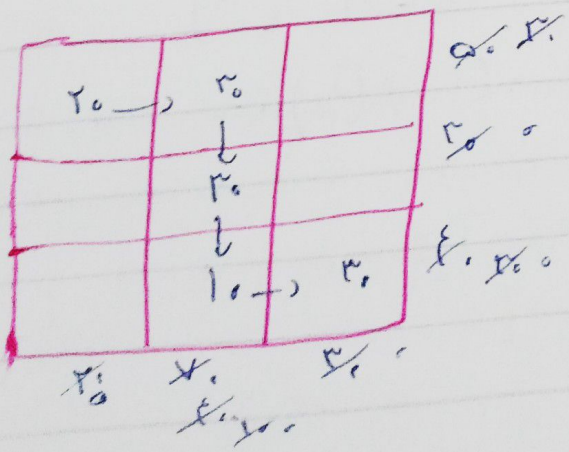
به شان کنید سهم کارخانه A ، ۵۰ واحد عرضه دارد. کارخانه ۲ ، ۳۰ واحد. کارخانه ۳ و ۴۰ واحد به فروشگاه A ۲۰ واحد تقاضا، فروشگاه B ، ۷۰ واحد تقاضا و فروشگاه C ، ۳۰ واحد تقاضا دارد.

نکته : همواره سعی کنیم بر این است که مجموع تقاضا با مجموع عرضه برابر باشد.

هدف : تعیین اینکه کارخانه ام چه میزان محصول به فروشگاه ن ام ارسال کند.

یکی از روش های تخصیص ها روش شمال غرب است North_West Method

روش شمال غرب :



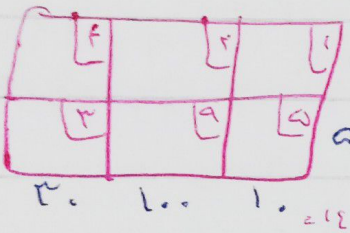
این روش از خانه شمال غرب جدول شروع می شود و به آن

$\min\{$ تقاضا ، عرضه $\}$

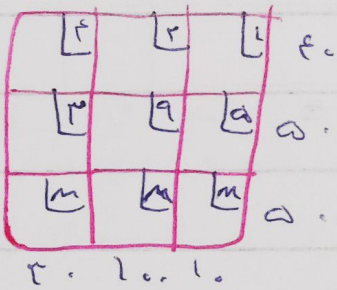
واحد می دهد تا زمانی که به خانه جنوب شرق برسد.

Not : همواره باید ابتدا چک کنیم که مجموع عرضه با مجموع تقاضا برابر است.

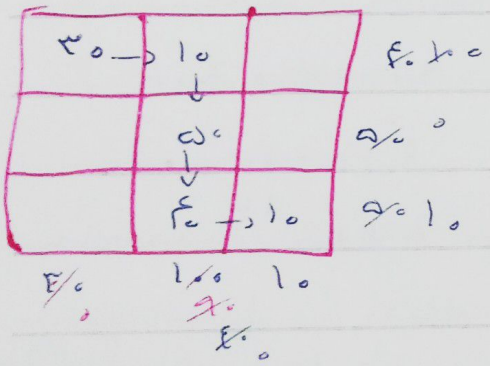
Not : در صورتی که مجموع عرضه و تقاضا با هم برابر نباشد باید یک سطر یا یک ستون مجازی با هزینه M مجموع اضافه کنیم.



یک سطر مجازی اضافه می کنیم



Ex :

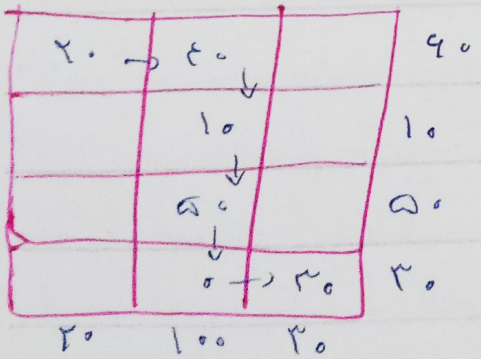


$x_{11} = 30$, $x_{22} = 50$

$x_{33} = 10$ $x_{12} = 10$

$x_{32} = 40$

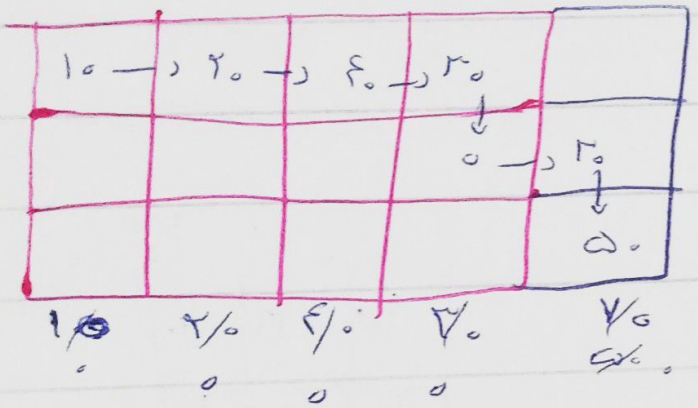
Ex :



$x_{11} = 20$, $x_{12} = 40$, $x_{34} = 10$

$x_{23} = 50$ $x_{42} = 0$

$x_{43} = 0$



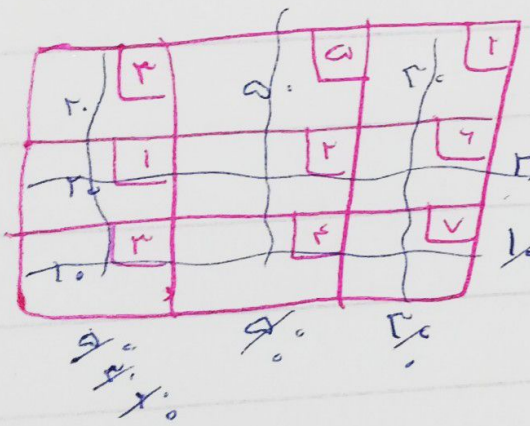
$x_{11} = 10$ ، $x_{12} = 20$

$x_{13} = 40$ ، $x_{14} = 30$

$x_{24} = 0$ ، $x_{25} = 20$

$x_{35} = 50$

روش راسل (کم ترین هزینه) Rassel



$x_{11} = 20$

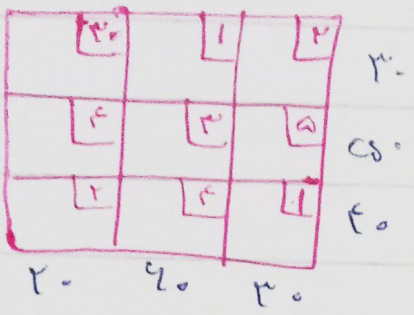
$x_{12} = 50$ ، $x_{13} = 30$

$x_{21} = 20$

$x_{31} = 10$

در این روش ابتدا (مجموع عرضه و مجموع تقاضا) و (مجموع تقاضا) را محاسبه کرده اگر آن برابر نباشد یک سطر یا ستون مجازی با هزینه های M اضافه. به شیر این صورت الگوریتم شروع - به خانه‌ای که کمترین هزینه را دارد (تقاضا عرضه) را min است حرکم. پس یک سطر یا یک ستون حذف می‌شود و الگوریتم تکرار شرط توقف: تا زمانی که همه خانه‌ها صفر شوند.

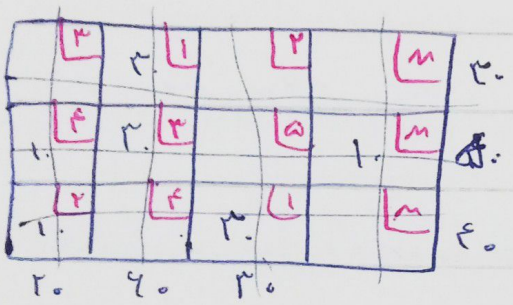
Ex:



$c_{11}=30$ $c_{21}=10$

$c_{22}=30$ $c_{24}=10$

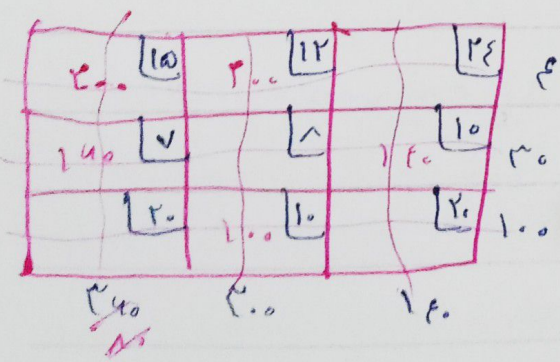
$c_{31}=10$ $c_{34}=20$



روش (ژوگل) (وُگل) Vogel یا fogel

یکی دیگر از روش های تخصیص، روش ژوگل است. در این روش برای هر سطر (ستون)، مقدار مطلق اختلاف میان کم‌ترین هزینه ها را پیدا کرده و آن عدد را نوشته. پس آن عددی که از همه بیش‌تر است را انتخاب کرده و به آن $\min\{\text{تقاضا و عرضه}\}$ را نسبت می دهد. پس یک سطر یا یک ستون حذف می‌شود. در صورتی که یک سطر حذف شود، جریمه های ستون ها update می‌شود. در صورتی که یک ستون حذف شود جریمه های سطرها update می‌شود.

Ex: روش ژوگل:

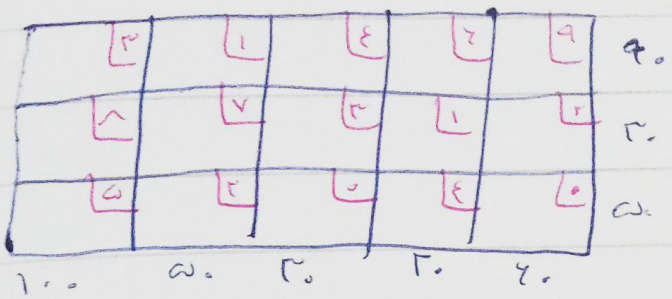


$c_{11}=200$ $c_{12}=200$

$c_{21}=140$ $c_{22}=140$

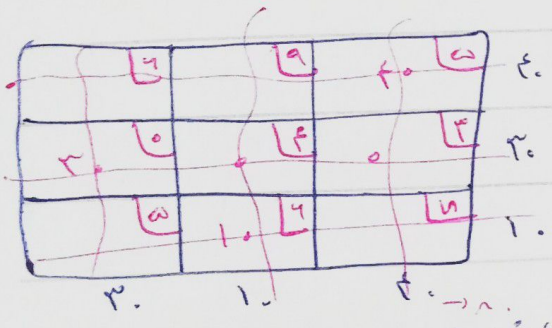
$c_{32}=100$

تمرین (به روش راسل و شمال غرب و روش مودی)



Ex روش مودی

در صورتی که یک سطر یا یک ستون جدید اضافه کنیم هزینه های آن سطر یا ستون را صفر (ترجیحاً) میگذاریم (میتوان M گذاشت)



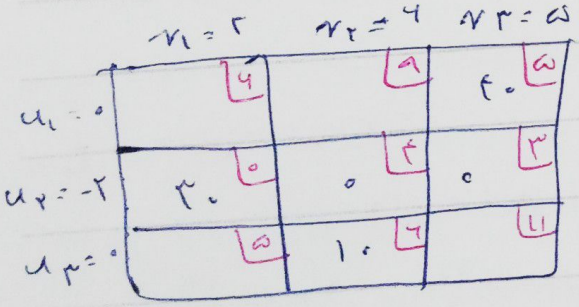
$x_{24} = 20$ ، $x_{22} = 0$

$x_{14} = 40$ ، $x_{23} = 0$

$x_{34} = 10$

روش مودی (u_i ، v_j) = (r_j ، c_i) میباشد روش سیمپلکس است که یک و دوی و یک مزدوجی دارد.

در این روش ابتدا با یک یکی از روش های شمال غرب، راسل، مودی یک جواب اساسی آغازین پیدا میکنیم.



∴ در خانه های پر شده $c_{ij} - v_j + u_i$ باشد

ابتدا u_i و v_j ها را مشخص کرده سپس به سراغ خانه های خالی (غیر اساسی یا غیر پایه ای) می رویم. $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ را برای خانه های خالی، حساب می کنیم.

خانه x_{11} : $\bar{c}_{11} = 0 + 2 - 6 = -4 < 0$

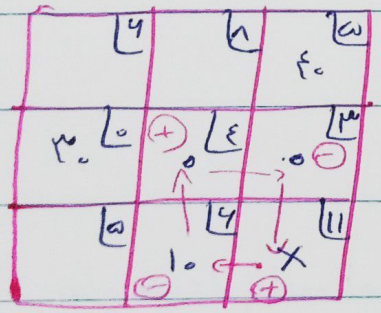
خانه x_{12} : $\bar{c}_{12} = 0 + 6 - 9 = -3 < 0$

خانه x_{13} : $\bar{c}_{31} = 0 + 2 - 9 = -7 < 0$

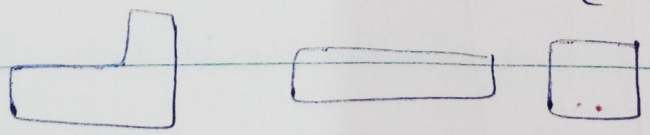
خانه x_{22} : $\bar{c}_{22} = 0 + 5 - 11 = -6 < 0$ • راه حل در حد پایه است

ضرر کنید سلله max سازی آنکه منفی نباشد.

در سلله max سازی آن که $\bar{c}_{ij} < 0$ تری دارد باشد وارد حلب ورود به پایه است در سلله min سازی آنکه $\bar{c}_{ij}$ تری دارد.



اکنون دور خانه راه حلب ورود به پایه حلقه ها می زنیم (حلقه شکل شد، از مربع مستطیل و یا ترکیبی از این دو).

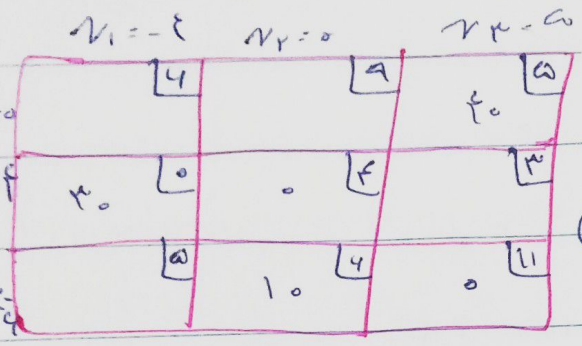


خود آن عدد را ⊕ و گوشه ها را ⊖ و ⊕ (یکی در میان) گوشه های مربع باید عناصر اساسی (خانه های پر شده) باشد اکنون عناصری که ⊖ دارند را min آنها را انتخاب کرد

$\min\{0, 10\} = 0$ ← در این شال

$x_{22} = 0$ (دوروی) و x_{22} پاک می‌شود (خروج از پایه)

اکنون الگوریتم تکرار می‌شود.



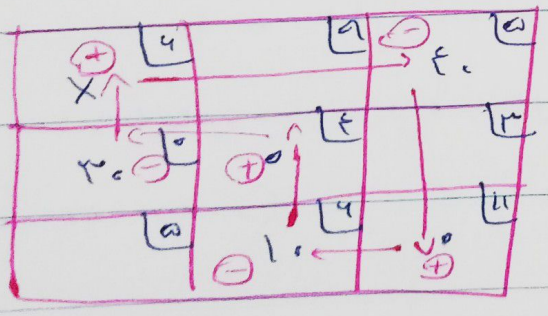
اکنون برای خانه‌های خالی $\bar{c}_{ij}$ محاسبه کرده (برای داوطلب ورودی پایه)

داوطلب ← $\bar{c}_{11} = 0 - 4 - 9 = -13 < 0$

$\bar{c}_{13} = 0 + 0 - 9 = -9 < 0$

$\bar{c}_{22} = 4 + 5 - 3 = 8 - 3 = 5 > 0$

$\bar{c}_{31} = 9 - 4 - 5 = -3 < 0$



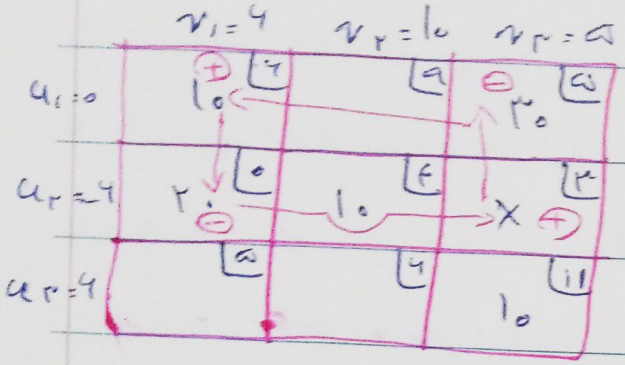
x_{32} خروجی $\min\{10, 40, 30\} = 10$

پس ← آنجا ⊕ دارند 10 واحد

اضافه و آنجا که ⊖ دارند 10 واحد

کم کرده و x_{32} نیز پاک می‌شود.

SEPANTA



مرحله سوم: تابع پتانسیل ها

چون وسط طلع یک خانه است

اساسی

پس Jump ما رویم

$\overline{C_{23}} = -4 + 8 - 3 = -4 < 0$ ← دارای ارزش ورود به پایه

$\overline{C_{11}} = 4 + 4 - 8 = 12 - 8 = 4 > 0$

$\overline{C_{32}} = 4 + 10 - 4 = 10 > 0$

$\overline{C_{12}} = 8 + 10 - 4 = 14 > 0$

تا وقتی ادامه می دهیم که دارای ارزش ورود به پایه نداشته باشیم.

شرایط توقف

SEPANTA

مثال: مسأله تخصیص یک منبع

کارخانه‌ای ۳ نوع محصول A و B و C تولید می‌کند هر محصول نیازمند استفاده از یک نوع ماده اولیه است که در کل ۴ تن در کارخانه موجود است به ازای تخصیص میزان معینی از مواد اولیه به هر محصول عایدی شخص نصیب کارخانه می‌شود. مقدار منابع تخصیص یافته و عایدی حاصل در جدول آمده است

هدف تخصیص [illegible]

چگونه ماده اولیه به محصولات به منظور حداکثر کردن عایدی کارخانه؟

پس رو

تخصیص ماده اولیه (تن) / نوع محصول	A	B	C
۰	۰	۰	۰
۱	۱۰	۶	۸
۲	۱۵	۱۷	۱۱
۳	۱۹	-	-

آیا: ۵ (یک تن ماده اولیه) نمی‌توانیم ۲ تن C تولید کنیم پس فقط از ۳ تن استفاده

ح: از روش پس رو و از ۵ شروع می‌شود.

برای محصول C

x۳ / ۵	۰	۱	۲	max (آ)
۰	۰	-	-	۰
۱	۰	۸	(۸)	۸
۲	۰	۸	۱۱	۱۱
۳	۰	۸	۱۱	۱۱
۴	۰	۸	۱۱	۱۱

SEPANTA

آیتم ۱ و صفر واحد B توسیع عقدارش صفر - پس $(1-0=1)$
۲ جدول C رفته و باید یک واحد C توسیه کرده (سطر سوم جدول)
پس مقدار آن ۸ است $8+0$

جدول B

x_2 / s	۰	۱	۲	m_{x_2} آخا
۰	۰	—	—	۰
۱	$8+0$	$4+0$	—	۸
۲	$0+11$	$4+8$	$12+0$	۱۲
۳	$0+11$	$4+11=15$	$12+8=25$	۲۵
۴	$0+11$	$4+11=$	$12+11=23$	۲۸

آیتم s_2 باشد واحد B توسیه کرده (4) پس $2-1=3$
واحد به جدول C رفته که max آن ۱۱ است درنهایت
$17 = 11+4$ آیتم $s=4$ و ۲ واحد B توسیه کرده (17) پس
$2 = 2-4$ ۲ جدول C رفته که max آن ۱۱ است درنهایت

$11+17$

جدول A

x_1 / s	۰	۱	۲	۳	max
	$0+28=28$	$20+25=35$	$16+12=32$	$18+9=27$	۳۵

آیتم $s=4$ و ۱ واحد A توسیه شود (پس $4-1=3$ در جدول A مقابل $s=3$ برابر ۳۵ است
آیتم $s=4$ و ۲ واحد A توسیه شود $(4-2=2$ در جدول A مقابل $s=2$ برابر ۲۷ است

SEPANTA
تلاش بیشتر موفقیت بیشتر

جواب : ۱۵ است.

پس یک واحد ۵ تولید شد پس ۴-۱=۳ رشته (۲ واحد B تولید شد)

پس ۱=۲-۳ به جدول ۶ رشته (یک واحد C تولید شد) □

پایان فصل ۶

برنامه‌ریزی اعداد صحیح (IP ...) integer programming

Not :

$$\begin{cases} \min z = C x \\ A x \leq b \\ x_i \text{ صحیح} \end{cases}$$

دربعضی از مسائل برنامه‌ریزی، جواب بهینه باید عدد صحیح باشد مانند مسائل تولیدی، توشه‌ای تولید روغن ...

Not : ابتدا مسأله را به روش Simplex معمولی حل کرده سپس از روش

صعب جو ممکن

صعب جو کمترین استفاده می‌کنیم.

Ex : فرض کنید مثالی با روش Simplex حل کرده و جدول زیر به دست آمده.

$\max Z = 22x_1 + 13x_2$

x_1	$12,5$
x_2	$15,1$

$z^* = 442$

$x_1 = 12,5 \quad , \quad \frac{x_2}{2} = 15,1$

$x_1 \leq [12,5] = 12$

$x_1 \geq [12,5] + 1 = 13$

اضافه کردن قید به مسأله

کف قبل حساب

SEDANTA

روش حریصانه:

در این روش، چون x_1 و x_2 هر دو مقدار صحیح به دست آمده، آن متغیری که قرب این در تابع هدف بزرگتر باشد انتخاب می‌کنیم. سپس روی آن متغیر، برنچ می‌کنیم.